



# Propriétés effectives d'un cristal photonique. Extensions de la méthode des sources fictives. Application à l'étude du guidage de modes quasi-TEM uniformes.

Raphaël Pierre

## ► To cite this version:

Raphaël Pierre. Propriétés effectives d'un cristal photonique. Extensions de la méthode des sources fictives. Application à l'étude du guidage de modes quasi-TEM uniformes.. Physique [physics]. Université Paul Cézanne - Aix-Marseille III, 2008. Français. NNT: . tel-00360840

**HAL Id: tel-00360840**

**<https://theses.hal.science/tel-00360840>**

Submitted on 12 Feb 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 2008AIX30041

## Thèse

pour obtenir le grade de **Docteur**

Spécialité : Électromagnétisme

---

# Propriétés effectives d'un cristal photonique. Extensions de la méthode des sources fictives. Application à l'étude du guidage de modes quasi-TEM uniformes.

---

Raphaël PIERRE

Soutenue le 03 décembre 2008 devant la commission d'examen.

Membres du jury :

David CASSAGNE <sup>1</sup>	Professeur, <b>rapporteur</b>
André DE LUSTRAC <sup>2</sup>	Professeur, <b>rapporteur</b>
Boris GRALAK <sup>3</sup>	Chargé de recherche CNRS, <b>tuteur</b>
Hervé LEGAY <sup>4</sup>	Ingénieur de recherche
Ronan SAULEAU <sup>5</sup>	Maître de conférences, membre de l'IUF
Gérard TAYEB <sup>3</sup>	Professeur, <b>directeur de thèse</b>

---

<sup>1</sup>Groupe d'Étude des Semiconducteurs, Université Montpellier II

<sup>2</sup>Institut d'Électronique Fondamentale, Université Paris-Sud XI

<sup>3</sup>Institut Fresnel, Université Paul Cézanne Aix-Marseille III

<sup>4</sup>Thales Alenia Space, Toulouse

<sup>5</sup>Institut d'Électronique et des Télécommunications de Rennes, Université Rennes I



N° d'ordre : 2008AIX30041

## Thèse

pour obtenir le grade de **Docteur**

Spécialité : Électromagnétisme

---

# Propriétés effectives d'un cristal photonique. Extensions de la méthode des sources fictives. Application à l'étude du guidage de modes quasi-TEM uniformes.

---

Raphaël PIERRE

Soutenue le 03 décembre 2008 devant la commission d'examen.

Membres du jury :

David CASSAGNE <sup>1</sup>	Professeur, <b>rapporteur</b>
André DE LUSTRAC <sup>2</sup>	Professeur, <b>rapporteur</b>
Boris GRALAK <sup>3</sup>	Chargé de recherche CNRS, <b>tuteur</b>
Hervé LEGAY <sup>4</sup>	Ingénieur de recherche
Ronan SAULEAU <sup>5</sup>	Maître de conférences, membre de l'IUF
Gérard TAYEB <sup>3</sup>	Professeur, <b>directeur de thèse</b>

---

<sup>1</sup>Groupe d'Étude des Semiconducteurs, Université Montpellier II

<sup>2</sup>Institut d'Électronique Fondamentale, Université Paris-Sud XI

<sup>3</sup>Institut Fresnel, Université Paul Cézanne Aix-Marseille III

<sup>4</sup>Thales Alenia Space, Toulouse

<sup>5</sup>Institut d'Électronique et des Télécommunications de Rennes, Université Rennes I



*« A beginning is the time for taking the most delicate care that the balances are correct. »*

— Frank HERBERT, *Dune*

# Remerciements

Mes premiers éloges vont naturellement à mes encadrants, Boris GRALAK et Gérard TAYEB, qui m'ont supervisé tout au long de ces trois dernières années. Ils ont su mettre en place un environnement de travail tout à fait propice à une communication scientifique efficace ainsi qu'à des liens d'amitié qui, je l'espère, perdureront. De même, je remercie vivement Stefan ENOCH d'avoir consacré une partie de son temps à ce projet et de nous avoir dispensé ses précieux conseils.

Je remercie également les membres « extérieurs » du jury, David CASSAGNE, professeur à l'université Montpellier II, André DE LUSTRAC, professeur à l'université Paris-Sud XI, Hervé LEGAY, ingénieur de recherche chez Thales Alenia Space, ainsi que Ronan SAULEAU, maître de conférences à l'université Rennes I, pour l'intérêt qu'ils portèrent au contenu scientifique de nos travaux aussi bien lors de la lecture de ce document que lors de la soutenance.

Je tiens à remercier Amélie LITMAN, Gilles RENVERSEZ, Hervé TORTEL, Guillaume MAIRE, Gabriel SORIANO, Frédéric FORESTIER, Patrick VINCENT — des équipes C.L.A.R.T.E., S.E.M.O. et H.I.P.E. — et Stéphane DERRODE — de l'équipe G.S.M. — pour avoir répondu à mes interrogations ainsi que pour leur bonne humeur quotidienne.

Je resterai plus que reconnaissant envers ma famille — p'pa et m'man, FX et Cynth', Thomas et Claire, Nieuw — pour m'avoir « exhorté » et accueilli à de multiples reprises sur Marseille, Nantes et Paris ou encore Bedford et Londres lors de mes tribulations en Europe.

Un immense merci aux potes — Jean [« Ô gàriiii!!! Tu marronnes?! »], Fredinho [« Et voilà!! Tout péravé!!! »] et Camila, Raph' [« T'inquiète... »] et Jessie, Samy [et son inimitable Vento] et Marion [et son inimitable Chadly], Octav' et Mag', Boris et Mylène, Mo', Pierre, Nico', Giacomo, David, Greg [alias Koopobol], Boise [de Vreuss']... — pour leur ouverture d'esprit, leur soutien sans faille pendant la thèse ainsi que pour tous ces excellents moments passés entre nous.

*And, last but not least, to Harry and Joti: many thanks for the good times we spent around the Bay Area.*



# Table des matières

<b>Page de garde</b>	<b>i</b>
<b>Remerciements</b>	<b>iii</b>
<b>Table des matières</b>	<b>v</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>I Éléments de théorie en électromagnétisme</b>	<b>5</b>
<b>1 Équations fondamentales et notations</b>	<b>7</b>
1.1 Notations et conventions . . . . .	7
1.1.1 Conventions d'écriture . . . . .	7
1.1.2 Conventions physiques . . . . .	8
1.2 Équations de Maxwell harmoniques . . . . .	9
1.3 Conditions aux limites entre deux matériaux . . . . .	9
1.3.1 À l'interface entre un conducteur électrique parfait et un diélectrique . .	10
1.3.2 À l'interface entre un conducteur magnétique parfait et un diélectrique	10
1.3.3 À l'interface entre deux diélectriques . . . . .	11
<b>2 Grandeurs effectives d'un cristal photonique monodimensionnel</b>	<b>13</b>
2.1 Introduction . . . . .	13
2.2 Réflexion sur un cristal photonique monodimensionnel semi-infini . . . . .	14
2.2.1 Définition des champs incident et réfléchi . . . . .	15
2.2.2 Expression des coefficients de réflexion sur le cristal . . . . .	15
2.3 Un milieu anisotrope comme modèle . . . . .	16
2.3.1 Anisotropie uniaxe . . . . .	16
2.3.2 Relation de dispersion dans un milieu homogène anisotrope . . . . .	17
2.3.3 Coefficients de réflexion et de transmission à l'interface entre un milieu isotrope et un milieu anisotrope . . . . .	18
2.4 Milieu homogène effectif . . . . .	20
2.4.1 Perméabilité et permittivité effectives du cristal . . . . .	20
2.4.2 Influence du dimensionnement de la cellule élémentaire sur le compor- tement du cristal . . . . .	22
2.4.3 Prolongement du modèle . . . . .	27
2.5 Application aux cristaux photoniques d'épaisseur finie . . . . .	28

2.5.1	Cristal monodimensionnel ultraréfractif . . . . .	28
2.5.2	Cristal bidimensionnel à réfraction négative, cas de la « lentille plate » . . . . .	29
2.6	Conclusion . . . . .	31
<b>II</b>	<b>La méthode des sources fictives pour la résolution numérique de problèmes d'électromagnétisme</b>	<b>33</b>
<b>3</b>	<b>Méthode des sources fictives <i>usuelle</i></b>	<b>35</b>
3.1	Principe et originalité de la méthode . . . . .	35
3.2	Contexte d'étude . . . . .	37
3.2.1	Objets cylindriques . . . . .	37
3.2.2	Milieux optiques . . . . .	37
3.3	Reformulation des équations de Maxwell . . . . .	38
3.3.1	Les champs transverses en fonction des longitudinaux . . . . .	38
3.3.2	Choix de normalisation . . . . .	39
3.4	L'équation de Helmholtz . . . . .	40
3.4.1	Énoncé . . . . .	40
3.4.2	Solutions de l'équation de Helmholtz . . . . .	40
3.5	Cas élémentaire de la diffraction par un ensemble de tiges parallèles . . . . .	41
3.5.1	Définition des différents domaines . . . . .	41
3.5.2	Champ incident en monture conique . . . . .	42
3.5.3	Expression des champs diffractés . . . . .	43
3.5.4	Champ total . . . . .	47
3.6	Modélisation numérique . . . . .	47
3.6.1	Choix du langage . . . . .	47
3.6.2	Profils et sources . . . . .	48
3.7	Résolution numérique . . . . .	49
3.7.1	Formulation numérique des conditions de continuité . . . . .	49
3.7.2	Système linéaire surdéterminé . . . . .	50
3.7.3	Méthode des moindres carrés . . . . .	52
3.7.4	Algorithmes de résolution . . . . .	53
3.8	Validation physique . . . . .	56
3.8.1	Section efficace de diffraction . . . . .	56
3.8.2	Théorème optique . . . . .	58
3.9	Illustration et validation de la méthode des sources fictives . . . . .	59
3.9.1	Fibre optique microstructurée . . . . .	59
3.9.2	Miroir hémicylindrique . . . . .	61
<b>4</b>	<b>Méthode des sources fictives <i>étendue</i></b>	<b>65</b>
4.1	Méthode des sources fictives et réseaux de diffraction . . . . .	65
4.1.1	État de l'art et objectifs . . . . .	65
4.1.2	Configurations . . . . .	66
4.1.3	Approche propre à la méthode des sources fictives <i>étendue</i> . . . . .	66
4.1.4	Expressions des champs dans et hors du réseau . . . . .	67
4.1.5	Conditions aux limites <i>étendues</i> . . . . .	69
4.1.6	Efficacités diffractées et conservation de l'énergie . . . . .	71

4.1.7	Illustrations	72
4.2	Méthode des sources fictives et guides d'ondes	76
4.2.1	Capacités de la méthode	76
4.2.2	Formulation du problème et résolution numérique	77
4.2.3	Recherche, détection et génération de modes	78
4.2.4	Exemples	80
<b>III</b>	<b>Optimisation de l'efficacité de surface en sortie d'une antenne résonante compacte</b>	<b>87</b>
<b>5</b>	<b>Génération d'un mode quasi-TEM uniforme guidé</b>	<b>89</b>
5.1	Introduction	89
5.1.1	Contexte d'étude	89
5.1.2	Objectifs et méthodologie	91
5.2	Surfaces compatibles avec la propagation d'un mode quasi-TEM uniforme	92
5.2.1	Guide et parois	92
5.2.2	Conditions <i>PEC</i> et <i>PMC</i>	93
5.2.3	Conditions <i>soft</i> et <i>hard</i>	94
5.3	Étude d'une surface <i>PMC</i> ouverte	94
5.3.1	Solution pour une surface <i>PMC</i>	94
5.3.2	Comportement de la phase des coefficients de réflexion	96
5.3.3	Bande passante	96
5.3.4	Comportement du champ au voisinage d'une surface <i>PMC</i>	97
5.4	Surfaces <i>hard</i>	97
5.4.1	Solutions pour surfaces <i>hard</i>	97
5.4.2	Étude de surfaces corruguées	98
5.4.3	Étude de surfaces à base de lignes microrubans	104
5.4.4	Conclusions	105
5.5	Approche simplifiée de la relation de dispersion d'un guide <i>hard</i>	106
5.5.1	<i>Zigzag path theory</i>	106
5.5.2	Guide <i>hard-PEC</i>	107
5.6	Étude numérique de guides <i>hard</i>	110
5.6.1	Première structure	110
5.6.2	Seconde structure	115
5.7	Conclusion	119
	<b>Conclusion générale</b>	<b>121</b>
	<b>Annexes</b>	<b>123</b>
<b>A</b>	<b>Le critère de la « <i>low-absorption limit</i> »</b>	<b>125</b>
A.1	Valeurs propres de la matrice de transfert	125
A.2	Constante de propagation dans le cristal	127
<b>B</b>	<b>Fonctions de Hankel et base multipolaire</b>	<b>129</b>

B.1 Fonctions de Hankel . . . . .	129
B.2 Base multipolaire . . . . .	130
<b>C Techniques pour la discrétisation de profils et le placement de sources</b>	<b>131</b>
C.1 Discrétisation de profils . . . . .	131
C.1.1 Superellipses . . . . .	131
C.1.2 Décomposition en série de Fourier . . . . .	132
C.2 Placement des sources . . . . .	133
C.2.1 Méthode des triangles . . . . .	133
C.2.2 Homothétie . . . . .	133
<b>Communication scientifique et bibliographie</b>	<b>135</b>
<b>Communication scientifique</b>	<b>137</b>
Congrès . . . . .	137
Publications . . . . .	137
R. Pierre et B. Galak, Journal of Modern Optics, 2008 . . . . .	138
B. Galak et <i>al.</i> , Journal of the Optical Society of America A, 2008 . . . . .	150
R. Pierre et <i>al.</i> , Journal of Modern Optics, 2009 . . . . .	162
<b>Bibliographie</b>	<b>171</b>

# Introduction générale

L'organisation de ce document suit la chronologie du doctorat et comprend en cela deux volets indépendants.

## Premier volet

Correspondant à la première partie du document, le premier volet de cette thèse concerne l'étude théorique de structures périodiques en électromagnétisme. Ces structures ont pour applications principales certains systèmes fonctionnant dans le domaine de l'optique. Dans ce domaine en particulier, les cristaux photoniques sont d'un intérêt majeur car les phénomènes physiques mis en jeu sont autant d'approches susceptibles d'améliorer certains systèmes actuels et sont à l'origine de concepts innovants.

- Le contrôle de l'émission spontanée en exploitant le phénomène de bande interdite photonique permettrait la réalisation de nouvelles sources lumineuses (lasers à semi-conducteurs, diodes électroluminescentes) à haut rendement.
- La conception d'une lentille « parfaite » à l'aide d'un cristal dont l'indice effectif serait égal à -1 permettrait de dépasser la limite de résolution qui affecte les lentilles conventionnelles.
- Les métamatériaux sont d'ores-et-déjà utilisés lors de la réalisation d'antennes compactes à forte directivité.
- Une nouvelle génération de fibres optiques dont le corps est percé suivant un motif périodique permettrait la transmission longue distance de fortes puissances.

Les développements théoriques ainsi que les résultats obtenus au cours de l'étude de tels systèmes contribuent également à la compréhension de phénomènes naturels telles les couleurs structurales de certains animaux ou de minéraux.

**Chapitre 1** Le premier chapitre a deux vocations principales. Dans un premier temps, il établit quelques conventions mathématiques et physiques ayant cours dans toute la suite du document. Dans un deuxième temps, il introduit les équations fondamentales de l'électromagnétisme sous la forme des équations de Maxwell et de corollaires, les conditions de continuité du champ électromagnétique à l'interface entre deux matériaux.

**Chapitre 2** Le second chapitre est une étude théorique de cristaux photoniques monodimensionnels. Sa finalité est double.

1. Obtenir une expression analytique des grandeurs effectives d'un cristal photonique (permittivité diélectrique et perméabilité magnétique) à l'aide d'un modèle et déterminer le domaine de validité de ce modèle.
2. Établir un critère sur la façon d'organiser une structure multicouche fonctionnant en transmission de telle sorte que l'adaptation d'impédance entre elle et le milieu ambiant soit assurée.



L'approche théorique étant nouvelle, nous nous sommes limités à l'étude de cristaux monodimensionnels pour lesquels les équations restent suffisamment simples. Les propriétés effectives de cette classe de cristaux sont obtenues par identification avec celles d'un milieu homogène anisotrope équivalent puis étudiées en faisant varier certains paramètres d'une couche élémentaire.

Un lien est fait avec des travaux ultérieurs mettant en œuvre des cristaux bidimensionnels.

## Second volet

Le second volet recouvre les deuxième et troisième parties du document ; il correspond au travail effectué au cours des deux dernières années du doctorat. La thématique diffère sensiblement de celle abordée dans le premier volet car l'étude entre dans le cadre d'un partenariat groupant l'Institut Fresnel, l'Institut d'Électronique et des Télécommunications de Rennes (IETR) et Thales Alenia Space (donneur d'ordre). Le projet mené par Thales Alenia Space avait pour principal objectif la réalisation d'une antenne compacte opérant dans le domaine des micro-ondes et qui puisse être intégrée dans un réseau phasé lui-même embarqué sur système satellite. L'Institut Fresnel s'est chargé de l'analyse théorique et numérique de parois latérales à même d'augmenter l'efficacité de surface de l'un des éléments rayonnants et, par extension, de celle de l'ensemble du réseau. Ces parois seront principalement étudiées à l'aide de la méthode modale et plusieurs guides d'ondes incluant ce type de motifs seront modélisés par l'intermédiaire de la méthode des sources fictives ainsi que de la méthode des éléments finis.

**Chapitre 3** Le troisième chapitre expose le principe de la méthode des sources fictives pour la résolution du problème de la diffraction d'une onde électromagnétique par une collection de cylindres parallèles, homogènes et de section arbitraire. Dans un premier temps, le problème est décrit sous sa forme mathématique puis différents algorithmes de résolution sont envisagés. Quelques exemples ont été ajoutés en fin de chapitre afin d'illustrer spécificités et performances de la méthode.

**Chapitre 4** Le quatrième chapitre est une extension du précédent dans la mesure où il traite de la méthode des sources fictives — alors dite *étendue* — adaptée aux réseaux de diffraction et aux guides d'ondes. Le développement de cette version de la méthode des sources fictives se place dans le contexte du partenariat avec Thales Alenia Space et a pour buts initiaux :

1. la simulation numérique de surfaces métalliques périodiques à motif quelconque ;
2. l'étude de guides de section quelconque (avec accès aux relations de dispersion et cartes de champs) mêlant diélectrique et métal.

Comme pour le troisième chapitre, limites et capacités de la méthode sont illustrées par quelques simulations numériques.

**Chapitre 5** Le cinquième chapitre est la recherche de surfaces qui, une fois devenues parois latérales de l'antenne, sont à même de tolérer la propagation d'un mode quasi-TEM<sup>1</sup> uniforme en amplitude et en polarisation. L'excitation de ce dernier aura pour conséquence de fortement accroître efficacité de surface et directivité du système.

---

<sup>1</sup> *Transverse ElectroMagnetic*.

Les solutions envisagées pour parvenir à exciter un mode de cette catégorie sont avant tout des réseaux de diffraction et leur caractérisation en « espace libre » constitue le premier développement du chapitre. Dans un deuxième temps, le problème de l'antenne est ramené à celui d'un guide infiniment long et à la génération d'un mode quasi-TEM uniforme dans celui-ci. Plusieurs configurations incluant des parois « structurées » sont traitées par la méthode des sources fictives et validées puis complétées par quelques codes commerciaux basés sur la méthode des éléments finis. Relations de dispersion et cartes de champs appuieront nos conclusions.



## **Première partie**

# **Éléments de théorie en électromagnétisme**



# Chapitre 1

## Équations fondamentales et notations

### Sommaire

1.1	Notations et conventions	7
1.2	Équations de Maxwell harmoniques	9
1.3	Conditions aux limites entre deux matériaux	9

### 1.1 Notations et conventions

#### 1.1.1 Conventions d'écriture

##### Vecteurs

Afin de faciliter la lecture de ce document, nous utiliserons des caractères **gras** pour désigner les grandeurs vectorielles ayant trait à la physique (les variables d'espace ainsi que les champs principalement). Les autres, mathématiques ou bien numériques, seront écrites sans marque distinctive.

Si  $z$  est une variable complexe (scalaire ou non) alors, quelle que soit sa dimension, on note  $z^*$  son **conjugué**.

Soient  $u$  et  $v$  deux vecteurs. Leur **produit scalaire** se note indifféremment

$$u \cdot v \text{ ou } \langle u, v \rangle, \quad u, v \in \mathbb{C}^n ; \quad (1.1.1)$$

et, leur **produit vectoriel**,

$$u \times v, \quad u, v \in \mathbb{C}^3. \quad (1.1.2)$$

Le **rotationnel** de  $U \in \mathbb{C}^3$  se définit par

$$\nabla \times U = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ U_x & U_y & U_z \end{vmatrix}. \quad (1.1.3)$$

La **norme**  $p$ ,  $p$  réel supérieur à un, de  $u$  pris dans  $\mathbb{C}^n$  se définit par

$$\|u\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |u_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.1.4)$$

### Applications

Le **saut** en  $x_0$  d'une fonction de la variable  $x$  se définit par la différence de ses limites à droite et à gauche,

$$[f]_{x_0} = \lim_{x \downarrow x_0} f(x) - \lim_{x \uparrow x_0} f(x). \quad (1.1.5)$$

L'opérateur de **dérivation partielle** par rapport à la variable  $\alpha$  se note  $\partial_\alpha$ .

Soit  $M$  une matrice quelconque de  $\mathbb{C}^{n \times p}$ ,  $n, p \in \mathbb{N}^*$ .

- On note  ${}^t M$  sa **transposée**.
- On note  $M^\dagger = {}^t M^*$  son **adjoint**.
- Avec  $x \in \mathbb{C}^p$ , on définit la **norme**  $j$  de  $M$  par

$$\|M\|_j = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Mx\|_j}{\|x\|_j}. \quad (1.1.6)$$

Le **conditionnement** [N1] de  $M$ ,  $\kappa(M)$ , initialement défini pour les matrices carrées peut être étendu aux matrices « rectangulaires ».

1. En supposant que  $n$  soit égal à  $p$  et que  $M$  soit inversible,

$$\kappa_j(M) = \|M\|_j \|M^{-1}\|_j. \quad (1.1.7)$$

2. En supposant que  $n$  soit différent de  $p$  et que le rang de  $M$  soit égal à  $q = \min(n, p)$ ,

$$\kappa_2(M) = \frac{\sigma_1}{\sigma_q}, \quad \sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_q > 0; \quad (1.1.8)$$

où  $\sigma_q$  est la  $q$ -ième plus grande valeur singulière de  $M$ .

## 1.1.2 Conventions physiques

### Spatiales

Est associé à l'espace  $\mathbb{R}^3$  un repère  $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  pour lequel  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  constitue une base orthonormée. De manière générale, un point de l'espace sera repéré par un vecteur du type  $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ .

Lorsque l'unité d'une distance n'est pas précisée, il est convenu qu'elle est identique à celle de la longueur d'onde de travail.

### Temporelles

Le champ électromagnétique  $[\mathcal{E}(\mathbf{r}, t), \mathcal{H}(\mathbf{r}, t)]$  est fonction de l'espace et du temps. Il est pris harmonique et de pulsation  $\omega$  avec une dépendance temporelle en  $e^{-i\omega t}$ . Par la

suite, nous utiliserons un champ  $[\mathbf{E}(\mathbf{r}), \mathbf{H}(\mathbf{r})]$  ne dépendant que de la variable espace et tel que

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left( \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \right), \quad (1.1.9)$$

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left( \mathbf{H}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \right). \quad (1.1.10)$$

Dans la mesure du possible, la dépendance (tacite) en  $\mathbf{r}$  du couple  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  sera omise.

## 1.2 Équations de Maxwell harmoniques

Considérons un milieu physique pris sans charges ni courant libres. Ses caractéristiques se résument à deux paramètres complexes, à savoir

- une permittivité diélectrique,  $\varepsilon$ ,
- une perméabilité magnétique,  $\mu$ .

On suppose que ces grandeurs sont constantes par morceaux vis-à-vis des variables d'espace et il se peut que leur valeur dépende de la fréquence à laquelle on travaille.

Avec la convention temporelle énoncée dans la section précédente, l'opérateur de dérivation par rapport au temps devient scalaire

$$\partial_t \equiv -i\omega \quad (1.2.1)$$

et les équations de Maxwell « générales » se simplifient en

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= i\omega\mu\mathbf{H}, \\ \nabla \times \mathbf{H} &= -i\omega\varepsilon\mathbf{E}. \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

## 1.3 Conditions aux limites entre deux matériaux

Le champ électromagnétique pris à la surface d'un objet obéit à différentes lois, lesquelles varient suivant la classe des matériaux entrant en ligne de compte. Soit  $\partial\Omega$  l'interface entre deux milieux distincts et  $\mathbf{n}_r$  la normale prise en un point  $\mathbf{r}$  de cette frontière.

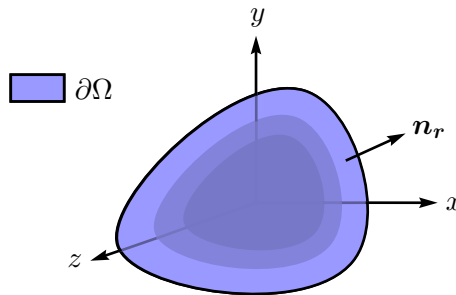


Figure 1.1 – Interface d'un objet tridimensionnel et normale en un point.

Les configurations étudiées au cours du doctorat impliquaient la définition de différentes classes de milieux. Si certaines regroupent des milieux présents dans la nature, les milieux diélectriques, quelques autres ne sont que des modèles, les milieux infiniment conducteurs.

Les milieux infiniment conducteurs se scindent en deux modèles : le conducteur électrique parfait (*PEC* pour *Perfect Electric Conductor*) et le conducteur magnétique parfait



(*PMC* pour *Perfect Magnetic Conductor*). Contrairement au cas du *PEC* qui est un modèle intuitif en physique des hyperfréquences, la définition du *PMC* ne s'inspire pas de celle d'un milieu physique. La vraisemblance de ce modèle repose sur la conception, théorique ou bien pratique, de structures inhomogènes agissant *effectivement* comme des conducteurs magnétiques.

### 1.3.1 À l'interface entre un conducteur électrique parfait et un diélectrique

Le conducteur électrique parfait est un métal dont la conductivité est prise infinie (correspondant en cela à un métal dont l'épaisseur de peau est nulle). Le champ est, par définition, nul à l'intérieur.

#### Propriétés

1. Le champ électrique tangent à la frontière y est nul.

$$\forall \mathbf{r} \in \partial\Omega, \mathbf{n}_r \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}. \quad (1.3.1)$$

2. Le champ magnétique normal à la frontière y est nul.

$$\forall \mathbf{r} \in \partial\Omega, \mathbf{n}_r \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0. \quad (1.3.2)$$

#### Considérations sur les métaux dans le domaine des hyperfréquences

Dans le domaine des hyperfréquences, l'épaisseur de peau  $\delta$  d'un métal — dont les conductivité électrique et perméabilité magnétique sont respectivement  $\sigma$  et  $\mu$  — vaut approximativement

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi\nu\mu\sigma}} \quad (1.3.3)$$

à la fréquence  $\nu$ . Les métaux qui nous intéressent sont non-magnétiques et leur perméabilité magnétique relative est très proche de l'unité. Le tableau 1.1 ci-dessous donne quelques épaisseurs de peau à la fréquence de 10 GHz (dans la bande X) pour quelques métaux usuels.

Métal	$\sigma$ [MS·m <sup>-1</sup> ]	$\delta$ [μm]
Argent	63.0	0.63
Cuivre	59.6	0.65
Or	45.2	0.75
Aluminium	37.8	0.82

Tableau 1.1 – Épaisseur de peau pour différents métaux à 10 GHz.

Pour de très bons conducteurs, quelques microns de matière isolent parfaitement. Lors de simulations numériques effectuées dans le domaine des hyperfréquences, nous nous appuierons donc sur le modèle du *PEC* afin de modéliser toute portion de métal.

### 1.3.2 À l'interface entre un conducteur magnétique parfait et un diélectrique

Le conducteur magnétique parfait est au champ magnétique ce que le *PEC* est au champ électrique. Cependant, contrairement au *PEC* qui est un métal idéal, le *PMC* ne s'appuie sur aucun matériau existant à l'état naturel.

Certains matériaux composites ou motifs surfaciques plus ou moins complexes sont à l'étude et feraient office de *PMC* mais sur certaines plages de fréquences et pour certains vecteurs d'onde seulement. Les surfaces dites « à haute impédance » ou *Artificial Magnetic Conductors* — principalement étudiées par E. Yablonovitch et D. Sievenpiper [A1, A2] — peuvent faire office de *PMC*.

### Propriétés

1. Le champ magnétique tangent à la frontière  $y$  est nul.

$$\forall \mathbf{r} \in \partial\Omega, \mathbf{n}_r \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}. \quad (1.3.4)$$

2. Le champ électrique normal à la frontière  $y$  est nul.

$$\forall \mathbf{r} \in \partial\Omega, \mathbf{n}_r \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0. \quad (1.3.5)$$

### 1.3.3 À l'interface entre deux diélectriques

En l'absence de courants surfaciques, les conditions de passage d'un milieu diélectrique à un autre sont identiques pour les champs électrique et magnétique.

### Propriétés

1. Le champ électrique tangent à la frontière  $y$  est continu.

$$\forall \mathbf{r} \in \partial\Omega, \mathbf{n}_r \times [\mathbf{E}]_r = \mathbf{0}. \quad (1.3.6)$$

2. Le champ magnétique tangent à la frontière  $y$  est continu.

$$\forall \mathbf{r} \in \partial\Omega, \mathbf{n}_r \times [\mathbf{H}]_r = \mathbf{0}. \quad (1.3.7)$$



## Chapitre 2

# Grandeurs effectives d'un cristal photonique monodimensionnel

### Sommaire

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>13</b>
<b>2.2</b>	<b>Réflexion sur un cristal photonique monodimensionnel semi-infini</b>	<b>14</b>
<b>2.3</b>	<b>Un milieu anisotrope comme modèle</b>	<b>16</b>
<b>2.4</b>	<b>Milieu homogène effectif</b>	<b>20</b>
<b>2.5</b>	<b>Application aux cristaux photoniques d'épaisseur finie</b>	<b>28</b>
<b>2.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>31</b>

## 2.1 Introduction

En ce qui concerne les longueurs d'onde de l'optique (quelques centaines de nanomètres), les cristaux photoniques et, par extension, les métamatériaux sont des structures composites qui imposent un comportement extraordinaire au flux lumineux qui les aborde. Déjà, dans la nature, auprès de certaines gemmes (les opales) ou bien de structures synthétisées par le vivant, s'observe le phénomène remarquable de l'*iridescence*, phénomène causé par la périodicité du système à l'échelle micrométrique [E1, E2].

À leur tour, certaines structures artificielles accompagnées de quelques modèles théoriques mettent en évidence quelques effets notables en réfraction ; entre autres,

- l'*ultraréfraction* : ce que serait la réfraction au niveau d'un milieu homogène équivalent et dont l'indice optique serait inférieur à l'unité [E3] ;
- la *réfraction négative* : ce que serait la réfraction au niveau d'un milieu homogène équivalent et dont l'indice optique serait négatif [E4].

De nombreuses applications basées sur ces effets sont à l'étude dans le domaine de l'optique (à l'aide de diélectriques) ainsi que dans le domaine des micro-ondes (à l'aide de métaux). Pour ce qui est de l'optique, citons les *superprismes* [E5] ou encore la *lentille parfaite* [E6]. Cependant, la complexité des structures utilisées rend délicate leur mise en pratique.

Les quelques applications évoquées précédemment sont utiles en transmission et pour qu'elles soient exploitables, il faut veiller à ce que l'énergie que les structures mises en jeu réfléchissent soit aussi faible que possible. En d'autres mots, il faut approcher au mieux la condition d'*adaptation d'impédance* entre le milieu depuis lequel on éclaire la structure et la structure elle-même.

Le milieu ambiant est de manière générale homogène tandis que, par essence, un cristal photonique est fortement inhomogène si l'on considère des fréquences d'éclairement qui soient hors du domaine d'homogénéisation<sup>1</sup>. L'adaptation d'impédance doit donc être assurée entre deux milieux radicalement différents.

L'approximation d'un cristal par un milieu homogène s'impose donc naturellement car si l'on parvient à modéliser un cristal par un milieu effectif dont on connaisse les propriétés optiques, alors le comportement du cristal en termes de réflexion, de réfraction et de transmission est tout de suite appréhendable. De plus, les permittivité et perméabilité effectives sont deux paramètres de contrôle pour abaisser la réflectivité du système et tendre vers l'adaptation d'impédance [E7].

Il va sans dire que cette approximation n'est envisageable que pour certains domaines de fréquences et certaines gammes d'incidences seulement. Un cristal photonique est une structure trop complexe pour être substituée par un nombre restreint de paramètres effectifs (même dispersifs) qui ne dépendent pas du champ électromagnétique incident.

Ce chapitre est dédié à la modélisation de structures monodimensionnelles (1-D) et **sans pertes** ; cependant, des travaux ultérieurs [E8] concernant des structures bidimensionnelles (2-D) ont été menés et nous mentionnerons les résultats s'inscrivant dans la lignée de ceux issus du cas 1-D.

On introduit le modèle du *milieu homogène anisotrope* qui se prête bien à la modélisation de ce type de géométrie dans certaines bandes de fréquences. La progression du chapitre est linéaire et se calque sur le raisonnement suivant.

1. L'obtention d'une expression analytique pour
  - (a) les coefficients de réflexion sur un cristal photonique monodimensionnel,
  - (b) la relation de dispersion dans un cristal photonique monodimensionnel.
2. L'obtention d'une expression analytique pour
  - (a) les coefficients de réflexion sur un milieu homogène anisotrope,
  - (b) la relation de dispersion dans un milieu homogène anisotrope.
3. L'obtention des grandeurs effectives du cristal par l'identification des coefficients de réflexion **et** des relations de dispersion.
4. L'établissement d'un critère liant la sous-structure d'un cristal photonique monodimensionnel et sa propension à réfléchir la lumière.

## 2.2 Réflexion sur un cristal photonique monodimensionnel semi-infini

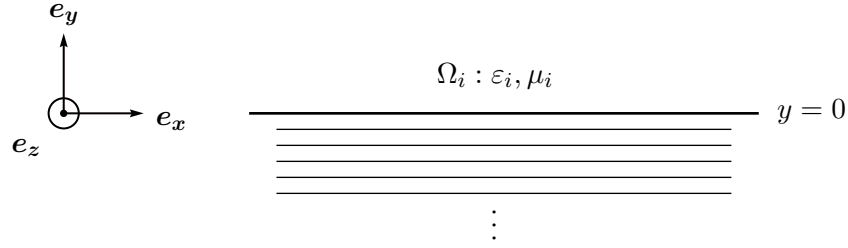
Le cristal photonique monodimensionnel semi-infini est un empilement (suivant  $y$ ) de cellules élémentaires identiques dont l'interface avec le substrat est rejetée à l'infini. Chaque cellule élémentaire est elle-même constituée d'un nombre fini de strates homogènes.

Le superstrat,  $\Omega_i$ , est un milieu homogène isotrope — de permittivité  $\varepsilon_i$  et de perméabilité  $\mu_i$  — en contact avec le cristal au niveau du plan de cote nulle,  $y = 0$ . Les grandeurs associées au cristal seront indexées par un « # ».

Rappelons que  $\varepsilon_i$  et  $\mu_i$  sont purement réelles en raison de l'absence d'absorption dans la structure cristalline.

---

<sup>1</sup>La longueur d'onde grande devant la période cristalline.

Figure 2.1 – *Cristal photonique monodimensionnel semi-infini.*

### 2.2.1 Définition des champs incident et réfléchi

L'interface qui sépare le superstrat du cristal est éclairée par une onde plane venant « du dessus » et dont le support est  $\Omega_i$ . Sans restriction aucune, nous fixons le plan d'incidence comme étant le plan  $xy$ . Le champ incident est d'amplitude unitaire et de polarisation linéaire de telle sorte que les deux états de polarisation fondamentaux (TE et TM) correspondent à l'orientation du champ électrique et du champ magnétique suivant la direction  $z$ .

Dans le milieu isotrope, deux ondes de pulsation  $\omega$  circulent (l'une est incidente et l'autre est réfléchi) et partagent la même constante de propagation dans un plan horizontal mais admettent des constantes de propagation opposées suivant la verticale. Écrivons leur vecteur d'onde respectif.

$$\mathbf{k}_i^i = k_{i,\parallel} \mathbf{e}_x - k_{i,\perp} \mathbf{e}_y \text{ pour le champ incident,} \quad (2.2.1)$$

$$\mathbf{k}_i^r = k_{i,\parallel} \mathbf{e}_x + k_{i,\perp} \mathbf{e}_y \text{ pour le champ réfléchi,} \quad (2.2.2)$$

avec  $k_{i,\perp} \geq 0$  et

$$\sqrt{k_{i,\parallel}^2 + k_{i,\perp}^2} = \sqrt{\epsilon_i \mu_i} \omega = \begin{cases} k_i^i = \|\mathbf{k}_i^i\|, \\ k_i^r = \|\mathbf{k}_i^r\|. \end{cases} \quad (2.2.3)$$

Les coefficients de réflexion (complexes) sur le cristal se notent

$$r_{\#}^E \text{ et } r_{\#}^H \quad (2.2.4)$$

en polarisation TE et TM respectivement. Avec ces notations, le champ total  $\mathbf{U}_i = U_{i,z} \mathbf{e}_z$  présent dans  $\Omega_i$  (la somme des champs incident et réfléchi) s'écrit :

$$U_{i,z}(x, y) = U_{i,z}^i(x, y) + U_{i,z}^r(x, y) \quad (2.2.5)$$

$$= e^{i(k_{i,\parallel}x - k_{i,\perp}y)} + r_{\#}^U e^{i(k_{i,\parallel}x + k_{i,\perp}y)}, \quad (2.2.6)$$

où

$$(\mathbf{U}, r_{\#}^U) = \begin{cases} (\mathbf{E}, r_{\#}^E) & \text{en polarisation TE,} \\ (\mathbf{H}, r_{\#}^H) & \text{en polarisation TM.} \end{cases} \quad (2.2.7)$$

### 2.2.2 Expression des coefficients de réflexion sur le cristal

L'expression des coefficients de réflexion sur un cristal est connue [E9] et ne dépend que de la seule période cristalline. Elle est déduite de la matrice de transfert  $T$  associée à une cellule élémentaire et de ses propriétés (les coefficients de  $T$  sont fonctions de la polarisation).

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}. \quad (2.2.8)$$

Une propriété notable de  $T$  est son déterminant unitaire,

$$\det(T) = t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21} = 1. \quad (2.2.9)$$

Pour alléger certaines relations à suivre, il est utile de définir les paramètres  $g$  et  $s$  tels que

$$g = \frac{\text{tr}(T)}{2} = \frac{t_{11} + t_{22}}{2} \text{ et } s = \frac{t_{11} - t_{22}}{2}. \quad (2.2.10)$$

Les coefficients de réflexion sur le cristal s'écrivent alors

$$r_{\#}^U = \frac{\beta_i^{\nu} - \beta_{\#}}{\beta_i^{\nu} + \beta_{\#}} \quad \text{où} \quad (U, \nu) = \begin{cases} (E, \mu) \text{ en polarisation TE,} \\ (H, \varepsilon) \text{ en polarisation TM,} \end{cases} \quad (2.2.11)$$

avec  $\beta_i^{\nu} = k_{i,\perp}/\nu_i$  et

$$\beta_{\#} = \begin{cases} \text{sgn}(\text{Re}(t_{12})) \frac{\sqrt{1-g^2}}{t_{12}} - i \frac{s}{t_{12}} & \text{si } g^2 < 1, \\ \text{sgn}(\text{Re}(g)) \frac{\sqrt{1-g^2}}{t_{12}} - i \frac{s}{t_{12}} & \text{si } g^2 > 1. \end{cases} \quad (2.2.12)$$

Cette expression de  $\beta_{\#}$  se retrouve simplement, du moins pour  $g^2 > 1$ , en considérant l'approche de la « *low-absorption limit* » dont les calculs sont reportés dans la partie A de l'annexe.

## 2.3 Un milieu anisotrope comme modèle

### 2.3.1 Anisotropie uniaxe

#### Configuration

Dans la perspective de simuler un cristal par un milieu anisotrope, le plan d'altitude nulle ( $\partial\Omega$ ) sépare l'espace en deux parties homogènes. La première, la partie « supérieure », est occupée par un milieu isotrope (dont les grandeurs caractéristiques seront indexées par  $i$ ) tandis que la seconde, la partie « inférieure », est occupée par un milieu anisotrope (dont les grandeurs caractéristiques seront indexées par  $a$ ).

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z, \quad \begin{cases} y > 0 \Leftrightarrow \mathbf{r} \in \Omega_i, \\ y = 0 \Leftrightarrow \mathbf{r} \in \partial\Omega, \\ y < 0 \Leftrightarrow \mathbf{r} \in \Omega_a. \end{cases} \quad (2.3.1)$$

Si les permittivité et perméabilité du milieu isotrope,  $\varepsilon_i$  et  $\mu_i$ , sont deux variables scalaires réelles,

$$\forall \mathbf{r} \in \Omega_i, \nu(\mathbf{r}) = \nu_i, \quad \nu_i \in \mathbb{R}; \quad (2.3.2)$$

celles du milieu anisotrope,  $\varepsilon_a$  et  $\mu_a$ , sont toutes deux tensorielles, complexes et diagonalisables.

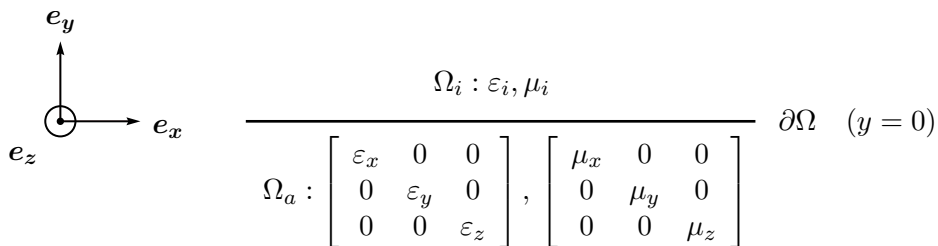


Figure 2.2 – Milieux isotrope ( $\Omega_i$ ) et anisotrope ( $\Omega_a$ ).

Dans la base propre du milieu, on a

$$\forall \mathbf{r} \in \Omega_a, \nu(\mathbf{r}) = \nu_a = \begin{bmatrix} \nu_x & 0 & 0 \\ 0 & \nu_y & 0 \\ 0 & 0 & \nu_z \end{bmatrix}, \quad \nu_a \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3; \quad (2.3.3)$$

où  $\nu = \varepsilon, \mu$  et, par hypothèse,

$$\nu_x \neq \nu_y \neq \nu_z. \quad (2.3.4)$$

La structure dont nous cherchons un modèle est un cristal photonique monodimensionnel dont les propriétés optiques soient invariantes dans un plan horizontal. Il est alors inutile d'avoir  $\nu_x, \nu_y$  et  $\nu_z$  tous trois indépendants. Si l'on indice la partie « horizontale » d'une variable par «  $\parallel$  » et sa partie « verticale » par «  $\perp$  », on a

$$\nu_x = \nu_z = \nu_{\parallel} \text{ et } \nu_y = \nu_{\perp}. \quad (2.3.5)$$

Ainsi, le milieu anisotrope correspondant est dit *uniaxe* et

$$\varepsilon_a = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\parallel} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{bmatrix} \text{ et } \mu_a = \begin{bmatrix} \mu_{\parallel} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\parallel} \end{bmatrix}. \quad (2.3.6)$$

### 2.3.2 Relation de dispersion dans un milieu homogène anisotrope

Les calculs seront effectués dans le cas de la polarisation TE,

$$\mathbf{E} = E_z \mathbf{e}_z, \quad (2.3.7)$$

puis étendus à la polarisation TM. Dans le milieu anisotrope, les équations de Maxwell (1.2.2) peuvent se réécrire

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= i\omega\mu_a \mathbf{H}, \\ \nabla \times \mathbf{H} &= -i\omega\varepsilon_a \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

Pour ce cas de polarisation et dans notre configuration, seules trois équations issues de ce système importent :

$$-i\omega\varepsilon_{\parallel} E_z = \partial_x H_y - \partial_y H_x, \quad (2.3.9)$$

$$i\omega\mu_{\parallel} H_x = \partial_y E_z, \quad (2.3.10)$$

$$i\omega\mu_{\perp} H_y = -\partial_x E_z. \quad (2.3.11)$$

Combinées, celles-ci conduisent à l'équation de Helmholtz dans le milieu anisotrope étudié :

$$i\omega\varepsilon_{\parallel} E_z = \partial_x \left( \frac{1}{i\omega\mu_{\perp}} \partial_x E_z \right) + \partial_y \left( \frac{1}{i\omega\mu_{\parallel}} \partial_y E_z \right). \quad (2.3.12)$$

Considérons un champ à structure d'onde plane (et d'amplitude unitaire) se propageant dans  $\Omega_a$ . Son vecteur d'onde est  $\mathbf{k}_a = k_{a,\parallel} \mathbf{e}_x - k_{a,\perp} \mathbf{e}_y$  de telle sorte qu'il s'écrive

$$E_z(x, y) = e^{i(k_{a,\parallel} x - k_{a,\perp} y)} \quad (2.3.13)$$

en  $\mathbf{r}$ . L'opérateur  $\partial_y$  est alors multiplicatif,

$$\partial_y \equiv -ik_{a,\perp}. \quad (2.3.14)$$



De plus, les milieux considérés sont homogènes dans un plan horizontal et l'opérateur  $\partial_x$  sur la transformée de Fourier du champ (partielle et suivant la direction  $x$ ) est également multiplicatif,

$$\partial_x \equiv i k_{a,\parallel}. \quad (2.3.15)$$

Finalement, la relation de dispersion en milieu anisotrope se déduit de l'équation (2.3.12) et s'écrit

$$\frac{k_{a,\parallel}^2}{\omega^2 \varepsilon_{\parallel} \mu_{\perp}} + \frac{k_{a,\perp}^2}{\omega^2 \varepsilon_{\parallel} \mu_{\parallel}} = 1, \quad (2.3.16)$$

qui n'est autre que l'équation d'une **ellipse** de rayons  $\omega \sqrt{\varepsilon_{\parallel} \mu_{\perp}}$  et  $\omega \sqrt{\varepsilon_{\parallel} \mu_{\parallel}}$ .

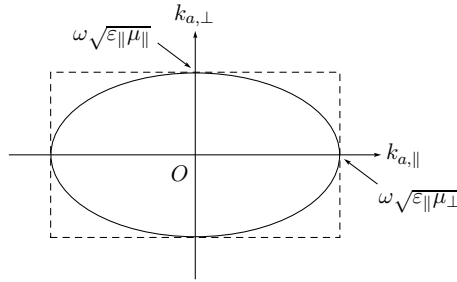


Figure 2.3 – Relation de dispersion elliptique centrée sur l'origine pour un milieu anisotrope uniaxe.

Dans le cas de la polarisation TM, il suffit d'effectuer les substitutions suivantes dès le début du raisonnement :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &\leftarrow \mathbf{H}, \\ \mathbf{H} &\leftarrow \mathbf{E}, \\ \mu &\leftarrow -\varepsilon, \\ \varepsilon &\leftarrow -\mu. \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

La relation de dispersion en polarisation TM est alors très similaire à celle en polarisation TE (2.3.16) ; seule la longueur de l'un des demi-axes est changée.

$$\frac{k_{a,\parallel}^2}{\omega^2 \varepsilon_{\perp} \mu_{\parallel}} + \frac{k_{a,\perp}^2}{\omega^2 \varepsilon_{\parallel} \mu_{\parallel}} = 1. \quad (2.3.18)$$

### 2.3.3 Coefficients de réflexion et de transmission à l'interface entre un milieu isotrope et un milieu anisotrope

#### Définition du champ réfléchi

Dans le milieu isotrope, les vecteurs d'onde respectifs aux ondes incidente et réfléchie s'écrivent :

$$\mathbf{k}_i^i = k_{i,\parallel} \mathbf{e}_x - k_{i,\perp} \mathbf{e}_y, \quad (2.3.19)$$

$$\mathbf{k}_i^r = k_{i,\parallel} \mathbf{e}_x + k_{i,\perp} \mathbf{e}_y, \quad (2.3.20)$$

avec  $k_{i,\perp} \geq 0$  et

$$\sqrt{k_{i,\parallel}^2 + k_{i,\perp}^2} = \sqrt{\varepsilon_i \mu_i} \omega = \begin{cases} k_i^i = \|\mathbf{k}_i^i\|, \\ k_i^r = \|\mathbf{k}_i^r\|. \end{cases} \quad (2.3.21)$$

Les coefficients de réflexion (complexes) sur le milieu anisotrope se notent

$$r_a^E \text{ et } r_a^H \quad (2.3.22)$$

en polarisation TE et TM respectivement. Avec ces notations, le champ total  $\mathbf{U}_i = U_{i,z} \mathbf{e}_z$  présent dans  $\Omega_i$  (la somme des champs incident et réfléchi) s'écrit :

$$U_{i,z}(x, y) = U_{i,z}^i(x, y) + U_{i,z}^r(x, y) \quad (2.3.23)$$

$$= e^{i(k_{i,\parallel}x - k_{i,\perp}y)} + r_a^U e^{i(k_{i,\parallel}x + k_{i,\perp}y)}, \quad (2.3.24)$$

où

$$(\mathbf{U}, r_a^U) = \begin{cases} (\mathbf{E}, r_a^E) & \text{en polarisation TE,} \\ (\mathbf{H}, r_a^H) & \text{en polarisation TM.} \end{cases} \quad (2.3.25)$$

### Définition du champ transmis

Dans le milieu anisotrope  $\Omega_a$ , seule une onde plane  $(\omega, \mathbf{k}_a^t)$  « transmise » se propage. Sa constante de propagation s'écrit

$$\mathbf{k}_a^t = k_{a,\parallel} \mathbf{e}_x - k_{a,\perp} \mathbf{e}_y, \quad (2.3.26)$$

avec  $k_{a,\perp} \geq 0$ .  $k_{a,\parallel}$  et  $k_{a,\perp}$  sont liés par la relation de dispersion d'une onde plane en milieu anisotrope (2.3.16) dans le cas TE ou (2.3.18) dans le cas TM.

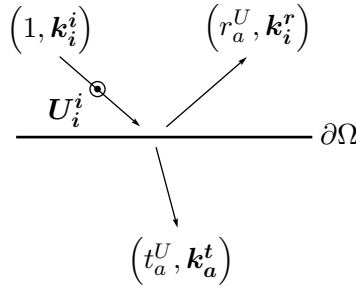


Figure 2.4 – Notations pour vecteurs d'onde, coefficients de réflexion et coefficients de transmission au voisinage d'un milieu anisotrope.

Les coefficients de transmission (complexes) se notent

$$t_a^E \text{ et } t_a^H \quad (2.3.27)$$

en polarisation TE et TM respectivement. Le champ total  $\mathbf{U}_a = U_{a,z} \mathbf{e}_z$  présent dans  $\Omega_a$  (restreint au champ transmis) s'écrit :

$$U_{a,z}(x, y) = U_{a,z}^t(x, y) = t_a^U e^{i(k_{a,\parallel}x - k_{a,\perp}y)}, \quad (2.3.28)$$

où

$$(\mathbf{U}, t_a^U) = \begin{cases} (\mathbf{E}, t_a^E) & \text{en polarisation TE,} \\ (\mathbf{H}, t_a^H) & \text{en polarisation TM.} \end{cases} \quad (2.3.29)$$

### Expression des coefficients de réflexion et de transmission

L'expression littérale des coefficients de réflexion et de transmission découle des conditions de continuité du champ à l'interface entre le milieu isotrope et le milieu anisotrope : la partie de  $\mathbf{E}$  tangente à la surface y est continue et il en est de même pour  $\mathbf{H}$ . Soit, en polarisation TE,

$$\begin{cases} \forall \mathbf{r} \in \partial\Omega, \mathbf{n} \times [\mathbf{E}]_{\mathbf{r}} = \mathbf{0} \Leftrightarrow E_{i,z}(\mathbf{r}) = E_{a,z}(\mathbf{r}), \\ \forall \mathbf{r} \in \partial\Omega, \mathbf{n} \times [\mathbf{H}]_{\mathbf{r}} = \mathbf{0} \Leftrightarrow H_{i,x}(\mathbf{r}) = H_{a,x}(\mathbf{r}). \end{cases} \quad (2.3.30)$$

En se référant à l'équation (2.3.10), exploitons le fait que

$$H_x = \frac{1}{i\omega\mu_{\parallel}} \partial_y E_z \quad (2.3.31)$$

et reformulons le système (2.3.30).

$$\begin{cases} 1 + r_a^E = t_a^E \\ \frac{1}{\mu_i} (-ik_{i,\perp} + ik_{i,\perp} r_a^E) = \frac{1}{\mu_{\parallel}} t_a^E (-ik_{a,\perp}) \end{cases} \quad (2.3.32)$$

Vient l'expression des deux coefficients en polarisation TE,

$$r_a^E = \frac{\beta_i^{\mu} - \beta_a^{\mu}}{\beta_i^{\mu} + \beta_a^{\mu}} \quad \text{et} \quad t_a^E = \frac{2\beta_i^{\mu}}{\beta_i^{\mu} + \beta_a^{\mu}}, \quad (2.3.33)$$

avec  $\beta_a^{\mu} = k_{a,\perp}/\mu_{\parallel}$  et  $\beta_i^{\mu} = k_{i,\perp}/\mu_i$ .

En polarisation TM, le résultat est similaire,

$$r_a^H = \frac{\beta_i^{\varepsilon} - \beta_a^{\varepsilon}}{\beta_i^{\varepsilon} + \beta_a^{\varepsilon}} \quad \text{et} \quad t_a^H = \frac{2\beta_i^{\varepsilon}}{\beta_i^{\varepsilon} + \beta_a^{\varepsilon}}, \quad (2.3.34)$$

avec  $\beta_a^{\varepsilon} = k_{a,\perp}/\varepsilon_{\parallel}$  et  $\beta_i^{\varepsilon} = k_{i,\perp}/\varepsilon_i$ .

## 2.4 Milieu homogène effectif

### 2.4.1 Perméabilité et permittivité effectives du cristal

#### Identification des relations de dispersion

Pour une fréquence donnée et hors d'une bande interdite photonique (ou *gap*), la relation de dispersion d'un cristal photonique monodimensionnel est généralement elliptique. À relations de dispersion identiques, un milieu anisotrope est de fait un excellent candidat pour atteindre les grandeurs effectives du cristal en question. Grâce à ce modèle, nous sommes à même d'affecter au cristal — par essence inhomogène — un milieu anisotrope — homogène — qui lui serait équivalent et ce pour une fréquence d'éclairement hors du domaine d'homogénéisation. Le modèle est séduisant de part le fait que nous avons accès aux termes «  $\varepsilon$  » et «  $\mu$  » indépendamment l'un de l'autre plutôt qu'au produit des deux (un indice de réfraction) pour lequel nous aurions moins de contrôle.

Le raisonnement suivant est, comme précédemment, valable en polarisation TE et il suffit d'effectuer quelques changements de variables (dont il a déjà été plusieurs fois question jusqu'à présent) pour aboutir au résultat de la configuration TM.

Considérons un cristal photonique monodimensionnel semi-infini dont les propriétés optiques ainsi que les dimensions caractéristiques sont connues. Celui-ci est éclairé sur sa face supérieure par un faisceau polarisé TE et de pulsation  $\omega$  de telle sorte que la relation de dispersion du cristal au voisinage de l'origine (sous-entendu  $k_{\#, \parallel} = k_{\#, \perp} = 0$ ) soit proche d'une *ellipse*. En première approximation,

$$\frac{k_{\#, \parallel}^2}{K_{\parallel}^2} + \frac{k_{\#, \perp}^2}{K_{\perp}^2} = 1. \quad (2.4.1)$$

Le cas d'une ellipse décentrée dans le plan  $(k_{\parallel}, k_{\perp})$  sera traité par la suite.

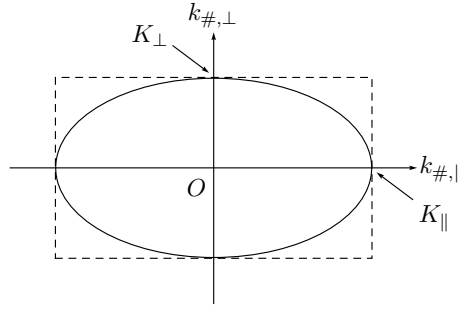


Figure 2.5 – Relation de dispersion elliptique centrée sur l'origine pour un cristal photonique monodimensionnel semi-infini.

Les grandeurs  $K_{\parallel}$  et  $K_{\perp}$  sont donc des **données** (fonctions de la fréquence). Si on les identifie aux deux demi-axes propres à la relation de dispersion d'un milieu anisotrope (2.3.16), cela nous permet d'écrire pour les perméabilités effectives recherchées :

$$\mu_{\parallel} = \frac{K_{\perp}^2}{\omega^2 \varepsilon_{\parallel}} \text{ et } \mu_{\perp} = \frac{K_{\parallel}^2}{\omega^2 \varepsilon_{\parallel}}. \quad (2.4.2)$$

Le modèle du milieu anisotrope impose que les trois grandeurs effectives du cristal soient liées : connaître  $\varepsilon_{\parallel}$  c'est connaître  $\mu_{\parallel}$  et  $\mu_{\perp}$ . À ce stade des calculs, nous n'avons que deux équations — le couple (2.4.2) — pour trois inconnues — à savoir  $\varepsilon_{\parallel}$ ,  $\mu_{\parallel}$  et  $\mu_{\perp}$  — car nous n'avons accès qu'aux produits  $\mu_{\parallel} \varepsilon_{\parallel}$  et  $\mu_{\perp} \varepsilon_{\parallel}$ .

### Identification des coefficients de réflexion

La troisième équation qui nous permet de séparer les différentes variables est l'identification des coefficients de réflexion,

$$r_{\#}^E = r_a^E. \quad (2.4.3)$$

Leurs écritures sont très proches et l'identification des deux conduit directement à une égalité portant sur les constantes de propagation,

$$\beta_{\#} = \beta_a^{\mu}. \quad (2.4.4)$$

Les expressions analytiques de ces deux variables sont connues et cela nous permet d'obtenir une expression analytique pour la permittivité  $\varepsilon_{\parallel}$ .

$$\varepsilon_{\parallel} = \begin{cases} \frac{K_{\parallel} K_{\perp}}{\omega^2} \beta_{\#} \sqrt{K_{\parallel}^2 - k_{\parallel}^2} & \text{si } k_{\parallel} < K_{\parallel}, \\ \frac{K_{\parallel} K_{\perp}}{i\omega^2} \beta_{\#} \sqrt{k_{\parallel}^2 - K_{\parallel}^2} & \text{si } k_{\parallel} \geq K_{\parallel}. \end{cases} \quad (2.4.5)$$

### Sur la nature complexe des grandeurs effectives

Nous avons choisi de ne modéliser que des structures dont les matériaux constitutifs soient sans pertes, c.-à-d. à permittivités et perméabilités réelles. Rappelons que si l'une de ces grandeurs est à partie imaginaire positive (négative), il s'agit d'un matériau à pertes (à gain). Deux régimes sont alors à distinguer.

1. Dans un *gap*,

$$k_{\parallel}^2 \geq K_{\parallel}^2 \Leftrightarrow g^2 \geq 1. \quad (2.4.6)$$

Dans ce premier cas, la constante de propagation  $\beta_{\#}$  — se référer à l'équation (2.2.12) — est imaginaire pure et, conséquemment,  $\varepsilon_{\parallel}$  en ressort réelle. Il en est de même pour  $\mu_{\parallel}$  et  $\mu_{\perp}$  et ce résultat reste cohérent avec l'hypothèse spécifiant que les matériaux soient sans pertes.

2. Hors d'un *gap*,

$$k_{\parallel}^2 < K_{\parallel}^2 \Leftrightarrow g^2 < 1. \quad (2.4.7)$$

Contrairement au cas précédent, la partie imaginaire de cette même constante de propagation n'est pas nécessairement nulle.  $\varepsilon_{\parallel}$ ,  $\mu_{\parallel}$  et  $\mu_{\perp}$  sont donc généralement à valeurs complexes.

Dans notre configuration et dans le cadre de la modélisation d'un cristal par un milieu anisotrope, nous parvenons au surprenant fait suivant : *les grandeurs effectives d'un cristal photonique sans pertes sont en général complexes*. Bien que cela ne soit pas intuitif, cela reste cohérent avec la physique pourvu que les produits  $\varepsilon_{\parallel}\mu_{\parallel}$  et  $\varepsilon_{\parallel}\mu_{\perp}$  soient tous deux réels strictement positifs.

#### 2.4.2 Influence du dimensionnement de la cellule élémentaire sur le comportement du cristal

Le couplage du champ à l'interface entre une structure périodique et un milieu homogène est intimement lié à la nature de la cellule élémentaire [E7]. Celle-ci a des répercussions sur l'adaptation d'impédance entre le milieu environnant et le cristal. C'est la force du couplage du champ à l'interface qui décidera du comportement du cristal en termes de réflexion, de transmission et de guidage. Il est donc important de choisir la meilleure manière d'organiser un cristal de telle sorte que les performances du système soient optimales suivant l'application visée.

Par la suite, nous considérerons deux empilements de manière successive : la cellule élémentaire du premier est optiquement asymétrique et celle du second symétrique. Des simulations numériques constitueront les principaux résultats.

##### Cellule asymétrique

Soit un cristal semi-infini dont la cellule unitaire est constituée de deux couches de même épaisseur mais de permittivités différentes, la première étant faite de silice et la seconde de silicium.

$$h_1 = \frac{h_{\#}}{2}, \quad \varepsilon_1 = 1.5^2 = 2.25, \quad (2.4.8)$$

$$h_2 = \frac{h_{\#}}{2}, \quad \varepsilon_2 = 3.4^2 = 11.56. \quad (2.4.9)$$

La cellule est dite *asymétrique* car la variation d'indice optique suivant  $y$  ne peut pas être ramenée à une fonction paire suivant la direction de l'empilement.

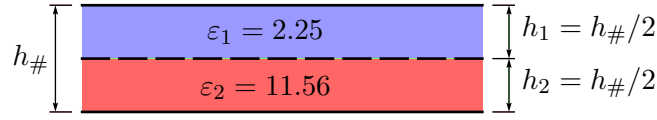


Figure 2.6 – Cellule élémentaire asymétrique.

**Remarque** La période initiale, constituée de deux strates dissemblables, est suffisamment simple pour que l'on puisse trouver un équivalent symétrique. Ce n'est par exemple plus le cas pour une cellule faite de trois couches toutes différentes les unes des autres. La « classe » de périodes que nous avons choisie nous permet d'étayer notre raisonnement et de tirer des conclusions générales sur les cristaux monodimensionnels. Ce n'est en aucun cas une limitation liée au modèle du milieu anisotrope.

La figure 2.7 représente la relation de dispersion dans le cristal et traduit une propriété [E9] de la demi-trace de  $T$ .

$$\begin{cases} g(\omega, k_{\parallel}) < 1 \Leftrightarrow \text{Bande de transparence, mode de Bloch.} \\ g(\omega, k_{\parallel}) > 1 \Leftrightarrow \text{Bande interdite, pas de propagation.} \end{cases} \quad (2.4.10)$$

Par la suite, nous nous intéresserons tout particulièrement à la fréquence normalisée

$$\omega h_{\#}/(2\pi) = 0.462, \quad (2.4.11)$$

fréquence à laquelle la relation de dispersion est une « petite » ellipse centrée sur l'origine. Nous avons donc accès aux constantes  $K_{\parallel}$  et  $K_{\perp}$  lesquelles sont proportionnelles aux deux rayons de l'ellipse représentée sur la figure 2.8.

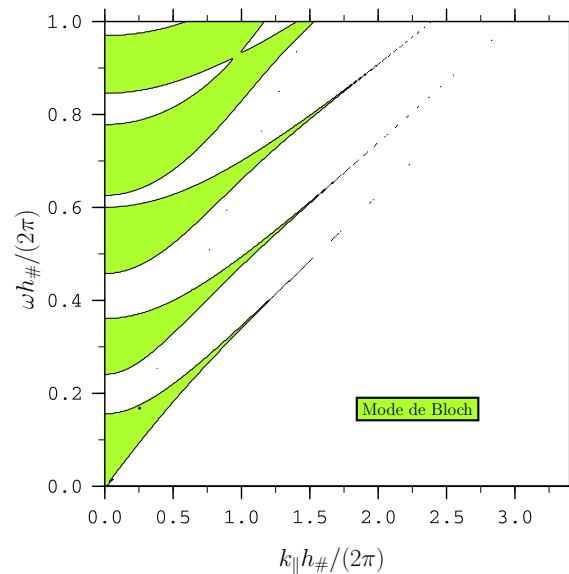


Figure 2.7 – Relation de dispersion dans la structure asymétrique (en vert : un mode de Bloch existe dans le cristal ; en blanc : le champ dans le cristal est évanescent).

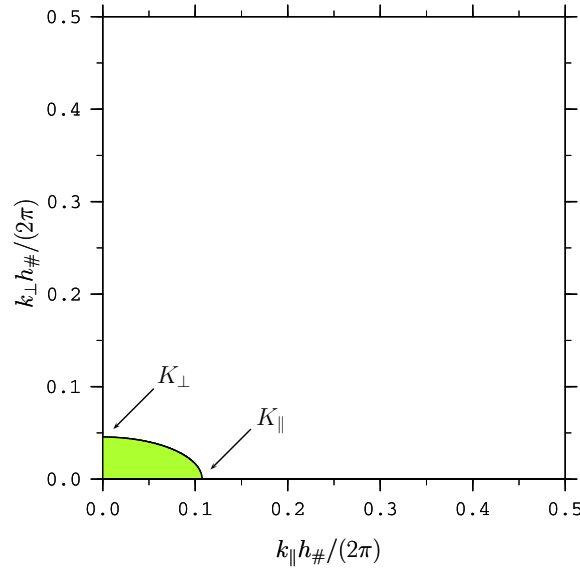


Figure 2.8 – Relation de dispersion à la fréquence normalisée  $\omega h_{\#}/(2\pi) = 0.462$ .

Ainsi, à la fréquence normalisée 0.462,

$$\frac{h_{\#}}{2\pi} K_{\parallel} \simeq 0.107 \quad \text{et} \quad \frac{h_{\#}}{2\pi} K_{\perp} \simeq 0.045. \quad (2.4.12)$$

L'expression analytique de la permittivité effective du cristal (2.4.5) peut se voir comme une fonction de  $k_{\parallel}$ . Cela permet de révéler le comportement du cristal en fonction de l'angle d'attaque de l'onde incidente.

$$\varepsilon_{\parallel}(k_{\parallel}) = \begin{cases} \frac{K_{\parallel} K_{\perp}}{\omega^2} \beta_{\#}(k_{\parallel}) \sqrt{K_{\parallel}^2 - k_{\parallel}^2} & \text{si } k_{\parallel} < K_{\parallel}, \\ \frac{K_{\parallel} K_{\perp}}{i\omega^2} \beta_{\#}(k_{\parallel}) \sqrt{k_{\parallel}^2 - K_{\parallel}^2} & \text{si } k_{\parallel} \geq K_{\parallel}. \end{cases} \quad (2.4.13)$$

Le caractère asymétrique de la cellule unitaire impose que les éléments diagonaux de la matrice  $T$  soient différents.

$$T = T_1 T_2, \quad T_1 \neq T_2 \Rightarrow t_{11} \neq t_{22} \quad (2.4.14)$$

où  $T_1$  et  $T_2$  sont les matrices de transfert associées aux sous-couches  $(\varepsilon_1, h_1)$  et  $(\varepsilon_2, h_2)$ . De plus, le fait que les matériaux soient sans pertes, implique que l'intégralité des coefficients de la matrice  $T$  soient réels.

$$\text{Im}(t_{ij}) = 0, \quad i, j = 1, 2. \quad (2.4.15)$$

Il en va de même pour  $s$  et, d'après la définition de  $\beta_{\#}$ ,

$$\left. \begin{array}{l} s \in \mathbb{R}, \quad t_{11} \neq t_{22} \Rightarrow s \neq 0 \\ t_{12} \in \mathbb{R}^* \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Im}(\beta_{\#}) \neq 0. \quad (2.4.16)$$

Dans la mesure où la constante de propagation  $\beta_{\#}$  n'est pas réelle, il faut s'attendre à ce que  $\varepsilon_{\parallel}$  soit également à partie imaginaire non-nulle. Les parties réelle et imaginaire de la permittivité considérée sont tracées en fonction de  $k_{\parallel}$  sur la figure 2.9.

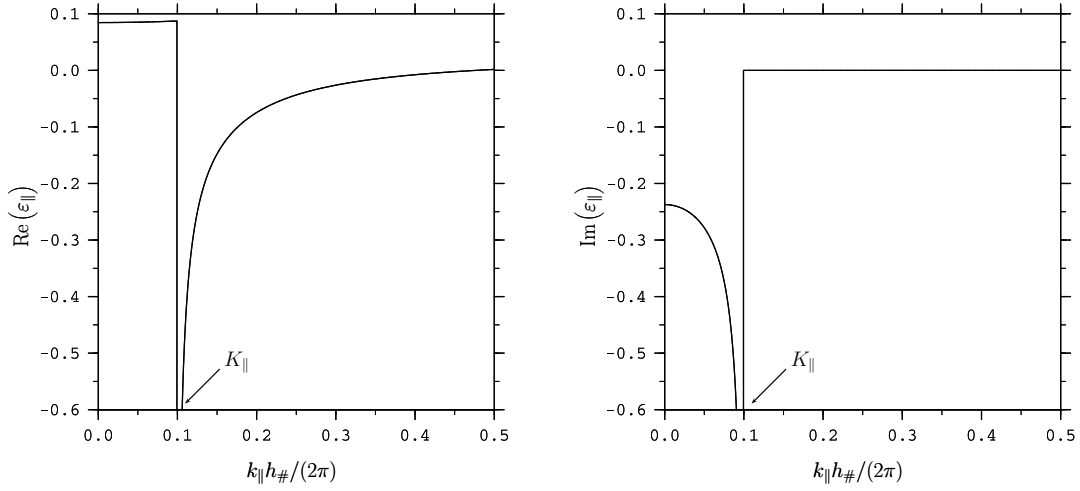


Figure 2.9 – Partie réelle (à gauche) et partie imaginaire (à droite) de la permittivité effective du cristal à cellule asymétrique pour la fréquence normalisée  $\omega h_{\#}/(2\pi) = 0.462$ .

En dehors de l'incidence normale (c.-à-d.  $k_{\parallel} \neq 0$ ), il apparaît que le modèle du milieu anisotrope ne soit pas à même de représenter un cristal dont la cellule élémentaire est asymétrique. Le principal argument allant dans ce sens est la non continuité de la permittivité à la frontière entre les ondes propagatives ( $k_{\parallel} < K_{\parallel}$ ) et les ondes évanescentes ( $k_{\parallel} > K_{\parallel}$ ). La difficulté à représenter la structure par une variable effective (de surcroît complexe) indique que la structure est difficilement remplaçable par un milieu homogène et l'adaptation d'impédance difficilement réalisable.

### Cellule symétrique

La structure est identique à celle du cas précédent (l'empilement est semi-infini) mais, cette fois, la cellule élémentaire est prise symétrique par rapport à un plan horizontal.

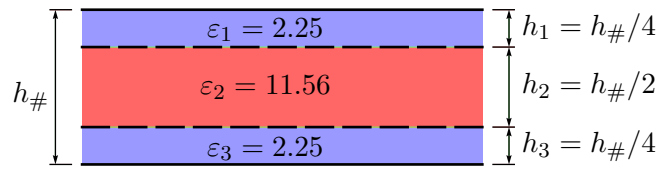


Figure 2.10 – Cellule élémentaire symétrique.

Les grandeurs caractéristiques sont

$$h_1 = \frac{h_{\#}}{4}, \quad \varepsilon_1 = 1.5^2 = 2.25, \quad (2.4.17)$$

$$h_2 = \frac{h_{\#}}{2}, \quad \varepsilon_2 = 3.4^2 = 11.56, \quad (2.4.18)$$

$$h_3 = \frac{h_{\#}}{4}, \quad \varepsilon_3 = 1.5^2 = 2.25. \quad (2.4.19)$$

et la matrice de transfert associée à la période cristalline est telle que ses éléments diagonaux soient égaux.

$$T = T_1 T_2 T_3, \quad T_1 = T_3 \Rightarrow t_{11} = t_{22}. \quad (2.4.20)$$



Nous pouvons tenir le même raisonnement que précédemment concernant la constante de propagation  $\beta_{\#}$ , soit

$$t_{11} = t_{22} \Rightarrow s = 0 \Rightarrow \text{Im}(\beta_{\#}) = 0. \quad (2.4.21)$$

$\beta_{\#}$  réelle,  $\varepsilon_{\parallel}$  est réelle et, par suite,  $\mu_{\parallel}$  et  $\mu_{\perp}$  également. Le résultat notable est le suivant : *une cellule élémentaire symétrique assure au cristal des grandeurs effectives réelles.*

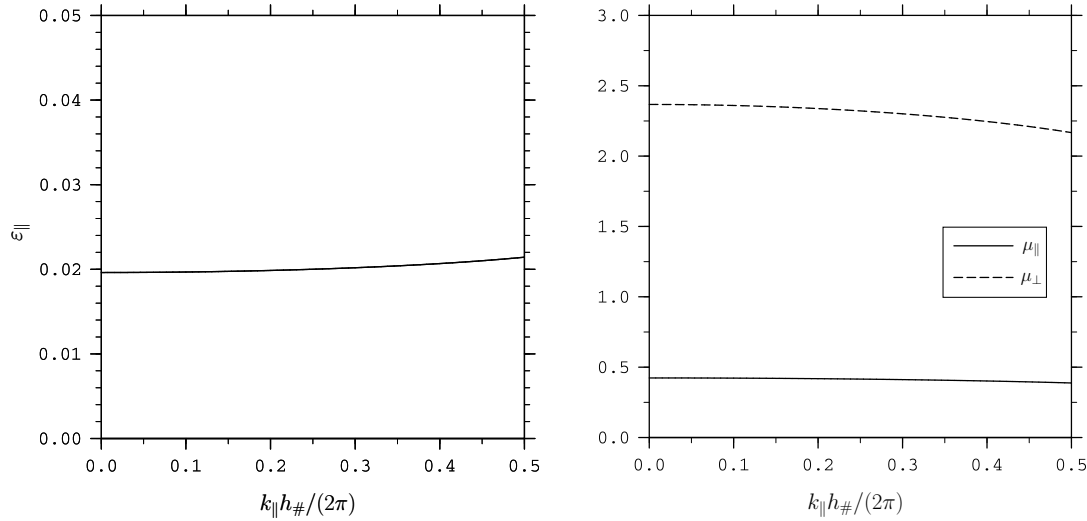


Figure 2.11 – *Permittivité (à gauche) et perméabilités (à droite) du milieu homogène anisotrope équivalent au cristal à cellule symétrique pour la fréquence normalisée  $\omega h_{\#} / (2\pi) = 0.462$ .*

L'évolution des grandeurs effectives dans le cas d'une structure à cellule symétrique est illustrée par la figure 2.11. Celle-ci nous permet de tirer certaines conclusions concernant le modèle employé ainsi que sur la tenue en fréquence<sup>2</sup> d'un cristal monodimensionnel.

- Il était attendu que les grandeurs effectives du cristal soient réelles et cela s'avère confirmé.
- Contrairement au cas du cristal à cellule asymétrique pour lequel les grandeurs effectives présentaient une singularité en  $k_{\parallel} = K_{\parallel}$ ,  $\varepsilon_{\parallel}$ ,  $\mu_{\parallel}$  et  $\mu_{\perp}$  sont des fonctions continues de  $k_{\parallel}$ .
- Les grandeurs effectives varient très peu sur un large éventail d'incidences. Cela implique que la réponse du cristal aux ondes propagatives ( $k_{\parallel} < K_{\parallel}$ ) vaut aussi pour les ondes évanescentes ( $k_{\parallel} \geq K_{\parallel}$ ).

<sup>2</sup>Spatiale comme temporelle.

### 2.4.3 Prolongement du modèle

Le modèle du milieu anisotrope est bien adapté aux structures dont, à une fréquence donnée, la relation de dispersion est suffisamment proche d'une ellipse centrée sur l'origine. Hors de ces fréquences, la forme de la relation de dispersion se complexifie et semble parfois s'approcher de celle d'une ellipse décentrée.

$$\frac{k_{\parallel}^2}{K_{\parallel}^2} + \frac{(k_{\perp} \pm 1/2)^2}{K_{\perp}^2} = 1. \quad (2.4.22)$$

Afin d'illustrer le problème, nous pouvons reconsidérer la structure dont la cellule élémentaire est symétrique mais, cette fois, à une fréquence normalisée différente :

$$\omega h_{\#}/(2\pi) = 0.255. \quad (2.4.23)$$

La relation de dispersion à cette fréquence est représentée sur la figure 2.12.

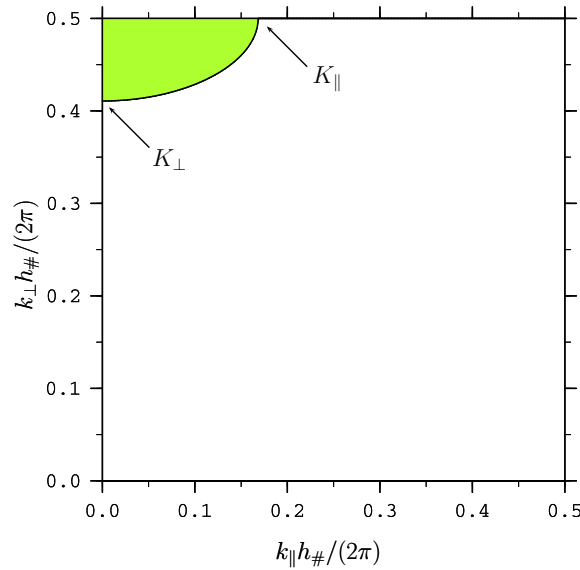


Figure 2.12 – Relation de dispersion à la fréquence normalisée  $\omega h_{\#}/(2\pi) = 0.255$ .

Celle-ci, par l'intermédiaire de la vitesse de groupe, influe sur la direction de propagation de l'énergie dans la structure or celle-ci reste inchangée si l'on translate l'ellipse parallèlement à l'axe  $k_{\perp}$ . Nous avons donc tenté de modéliser la relation de dispersion réelle du cristal par une ellipse centrée sur l'origine à nouveau en prenant

$$\frac{h_{\#}}{2\pi} K_{\parallel} \simeq 0.168 \quad \text{et} \quad \frac{h_{\#}}{2\pi} K_{\perp} \simeq 0.089. \quad (2.4.24)$$

Avec ces paramètres, les grandeurs effectives obtenues sont tracées sur les deux graphes suivants.

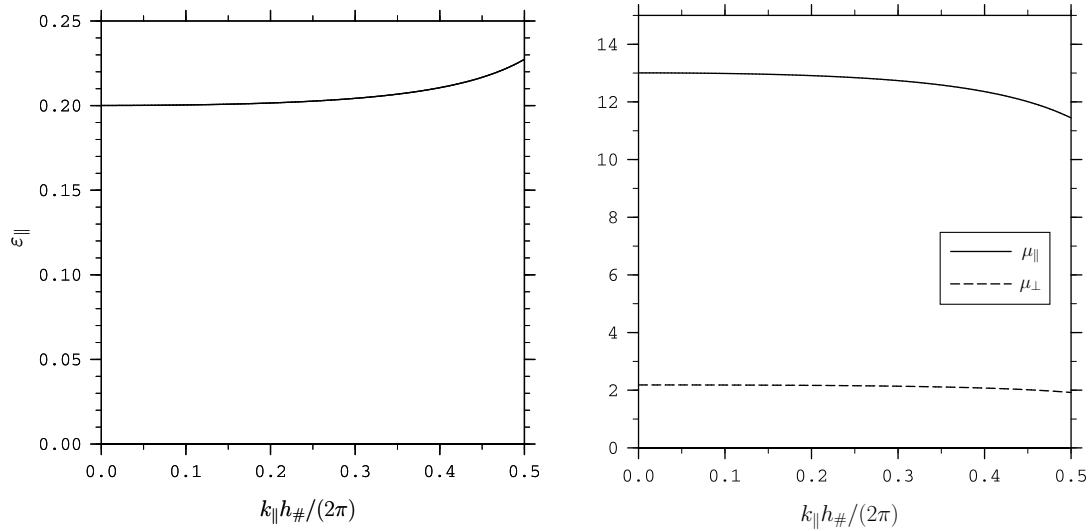


Figure 2.13 – Permittivité (à gauche) et perméabilités (à droite) du milieu homogène anisotrope équivalent au cristal à cellule symétrique pour la fréquence normalisée  $\omega h_{\#} / (2\pi) = 0.255$ .

Les courbes  $\varepsilon_{||}(k_{||})$ ,  $\mu_{||}(k_{||})$  et  $\mu_{\perp}(k_{||})$  sont à nouveau continues, à faible variation et strictement positives. Il apparaît alors que le modèle fonctionne également à des fréquences plus élevées pourvu que la relation de dispersion soit elliptique.

## 2.5 Application aux cristaux photoniques d'épaisseur finie

Les principales applications pratiques mettant en œuvre des cristaux photoniques reposent sur la capacité de ceux-ci à réfracter la lumière de manière anormale. Parmi les deux exemples numériques à suivre, le premier expose l'importance du critère obtenu concernant la symétrie d'une cellule élémentaire; le second apporte une extension de ce critère aux cristaux photoniques bidimensionnels.

### 2.5.1 Cristal monodimensionnel ultraréfractif

Dès le départ, le modèle du milieu anisotrope était prévu pour simuler des structures semi-infinies. Une structure semi-infinie reste une bonne approximation d'un cristal d'épaisseur finie pourvu que son épaisseur soit grande devant la longueur d'onde. La structure étudiée dans cette section est constituée de 256 périodes et deux cas sont envisagés : les cellules asymétrique et symétrique des sections précédentes. L'empilement est environné de vide et sa face supérieure est éclairée par un faisceau gaussien. L'amplitude du champ incident obéit à la loi  $A$ ,

$$A(k_{||}) = \frac{W}{2\sqrt{\pi}} e^{(k_{||} - k_0)^2 W^2 / 4} \quad (2.5.1)$$

où  $k_0 = \omega \sin \theta_0$ . L'amplitude maximale est ramenée à l'unité et

$$\omega h_{\#} / (2\pi) = 0.462, \quad (2.5.2)$$

$$\theta_0 = 10^\circ, \quad (2.5.3)$$

$$W = 40h_{\#}. \quad (2.5.4)$$

Dans ces conditions<sup>3</sup>, les valeurs des perméabilités effectives se déduisent des relations (2.4.2) grâce aux valeurs numériques (2.4.12) et à celle de la permittivité effective  $\varepsilon_{\parallel}$ . Celles-ci sont extraites de la figure 2.9 dans le cas de la cellule asymétrique ainsi que de la figure 2.11 dans le cas de la cellule symétrique.

Cellule	$\varepsilon_{\parallel}$	$\mu_{\parallel}$	$\mu_{\perp}$
Asymétrique	$0.086 - i0.416$	$0.00462 + i0.0224$	$0.256 + i1.24$
Symétrique	0.0197	0.422	2.36

Tableau 2.1 – *Grandeurs effectives de l'empilement de 256 périodes à la fréquence  $\omega h_{\#}/(2\pi) = 0.462$  et à l'incidence  $k_{\parallel} h_{\#}/(2\pi) = k_0 h_{\#}/(2\pi) = 0.0802$ .*

Contrairement à la configuration symétrique, les grandeurs effectives du cristal à cellule asymétrique ne sont pas réelles. Le système n'est pas optimal pour un fonctionnement en transmission et cela se traduit par une forte réflexion : 74 %. *A contrario*, une fois la cellule symétrisée, la réflexion chute de plus de vingt points pour atteindre 53 %. L'organisation d'une période s'avère donc essentielle en ce qui concerne les performances du système.

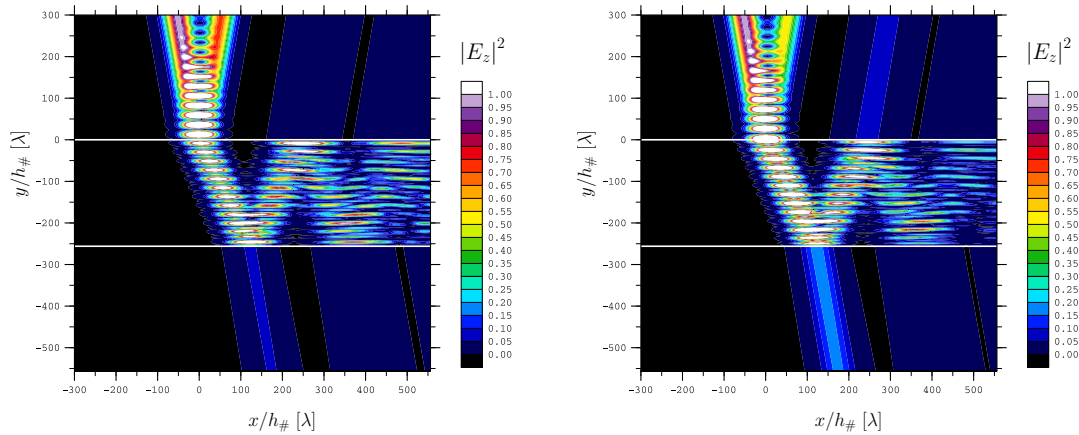


Figure 2.14 – *Module au carré du champ électrique normal au plan de coupe pour un empilement de 256 strates. La structure est éclairée sur sa face supérieure par un faisceau gaussien. À gauche : la cellule unitaire est asymétrique ; à droite : la cellule unitaire est symétrique.*

On notera que, à la frontière entre le superstrat et le cristal, l'angle sous lequel est réfracté le faisceau est supérieur à l'angle d'incidence. Ceci est conforme avec la « taille » de la relation de dispersion (figure 2.8) et synonyme d'*ultraréfraction*.

### 2.5.2 Cristal bidimensionnel à réfraction négative, cas de la « lentille plate »

Un cylindre de section rectangulaire en silicium ( $\varepsilon_{Si} = 12$ ) est percé périodiquement suivant un réseau hexagonal de longueur caractéristique  $a$ . Les « trous » sont des cylindres vides de section circulaire (rayon  $r$ ). Le milieu ambiant reste indéterminé pour l'instant. Par la suite, on reprend le jeu de données utilisé dans [E10] et [E11], à savoir

$$a = 0.68 \text{ et } r = 0.43a = 0.294. \quad (2.5.5)$$

<sup>3</sup>À la fréquence normalisée valant 0.462.

En premier lieu, la matrice de silicium a été taillée de telle sorte qu'elle vérifie le critère de symétrie dont il est question dans les sections qui précèdent. Bien que ce critère ne concerne que les structures monodimensionnelles il a été étendu puis appliqué à un cristal bidimensionnel [E10] et celui-ci se révèle être concluant *a posteriori*. Il s'avère que, en deux dimensions, la symétrie par rapport à un plan horizontal est un critère trop contraignant [E8]. En deux dimensions comme en une, la symétrie de la période doit être observée par rapport à un plan incluant une série de *centres d'inversion* de la structure. Un centre d'inversion peut être vu comme l'intersection de deux plans de symétrie d'une structure.

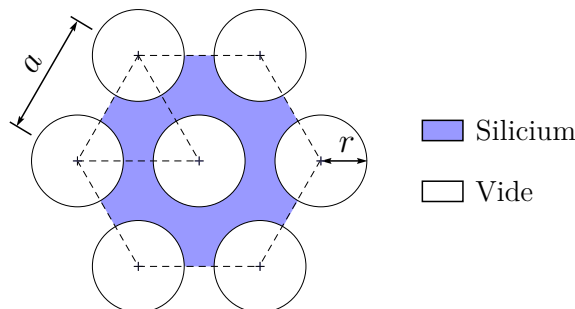


Figure 2.15 – Maille élémentaire du cristal.

Nous souhaitons dans cet exemple atteindre la condition d'adaptation d'impédance entre le cristal et le milieu environnant. Il est acquis [E11] qu'en polarisation TE et à la fréquence de travail

$$\omega a/(2\pi) = 0.336 \quad (2.5.6)$$

la relation de dispersion correspond à un cas de *réfraction négative* avec

$$\tilde{\varepsilon}, \tilde{\mu} < 0 \quad \text{et} \quad \tilde{\varepsilon}\tilde{\mu} = 1, \quad (2.5.7)$$

où  $\tilde{\varepsilon}$  et  $\tilde{\mu}$  sont les grandeurs effectives (scalaires) du cristal 2-D. Celles-ci sont obtenues numériquement [E11] et ne sont pas issues d'un modèle comme celui du milieu anisotrope dans le cas des cristaux 1-D.

L'adaptation d'impédance sera réalisée si les constantes du milieu ambiant,  $\varepsilon_a$  et  $\mu_a$ , vérifient

$$\varepsilon_a = |\tilde{\varepsilon}| \quad \text{et} \quad \mu_a = |\tilde{\mu}|. \quad (2.5.8)$$

L'intensité lumineuse réfléchiée par le cristal admet un minimum<sup>4</sup> lorsque  $\varepsilon_a$  varie. Cette valeur fixe alors les caractéristiques du milieu ambiant à

$$\varepsilon_a = 5.7 \quad \text{et} \quad \mu_a = 1/\varepsilon_a = 0.175. \quad (2.5.9)$$

La forme de la relation de dispersion à la fréquence  $\omega a/(2\pi) = 0.336$  nous permet de déduire que

$$\tilde{\varepsilon} = -5.7 \quad \text{et} \quad \tilde{\mu} = -0.175. \quad (2.5.10)$$

Les deux cartes de champ visibles ci-dessous exposent la différence entre un système adapté (à gauche) et un autre qui ne l'est pas (à droite). On constate que, dans le premier cas (figure 2.16 à gauche), le module du champ électrique atteint la valeur de 0.55 au niveau de l'image formée sous la lentille tandis que dans le second cas (figure 2.16 à droite) celui-ci atteint le niveau 0.35. C'est un gain notable qui prouve l'importance de l'adaptation d'impédance pour ce type de système.

<sup>4</sup>Résultat d'une simulation numérique.

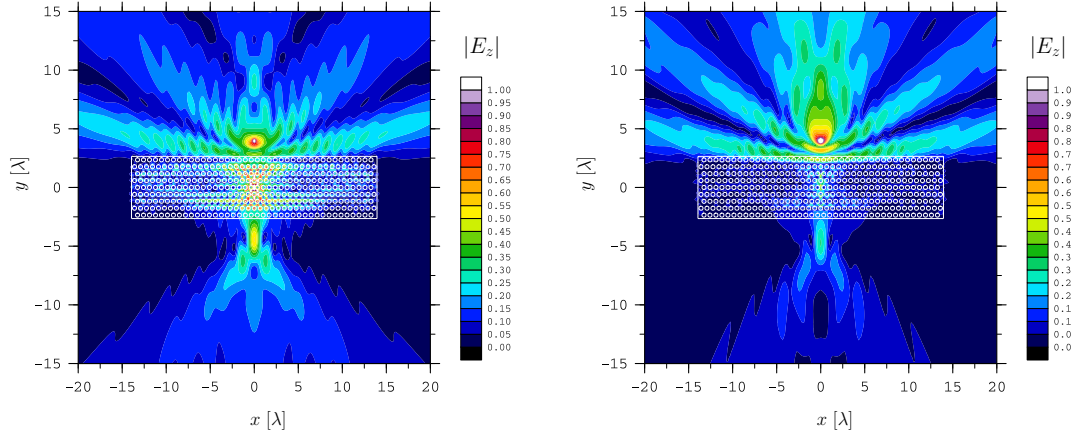


Figure 2.16 – Expérience de la « lentille plate » éclairée par une source filaire lorsque la condition d’adaptation d’impédance est réalisée (à gauche) ou non (à droite) lorsque le milieu ambiant est le vide.

## 2.6 Conclusion

Le modèle du milieu anisotrope aura permis d’atteindre les grandeurs effectives d’un cristal photonique monodimensionnel mais celles-ci ne sauraient retranscrire le comportement du cristal sans aucune restriction sur le champ incident. En effet, la validité du modèle disparaît lorsque, pour un régime de fréquence donné, la relation de dispersion cesse d’être proche d’une ellipse. Il semble peu probable qu’une petite série de paramètres effectifs puisse rendre compte de la totalité des propriétés cristallines et ce quel que soit le faisceau incident.

Néanmoins, dans son domaine de validité, le modèle est plus que satisfaisant, performant et il nous aura permis de mettre au jour l’effet de la symétrie interne du cristal sur les propriétés en réflexion de celui-ci. Un critère décidant de la façon d’empiler ou de tailler<sup>5</sup> un cristal photonique monodimensionnel a été établi puis confirmé et étendu aux cristaux bidimensionnels lors de travaux ultérieurs.

Des simulations numériques portant sur deux situations caractéristiques en photonique — deux cristaux types, l’un ultraréfractif et l’autre à réfraction négative — illustrent l’importance de ce critère ainsi que de la problématique plus générale de l’adaptation d’impédance concernant les structures périodiques diélectriques fonctionnant en transmission.

<sup>5</sup>Ce qui est équivalent à organiser intelligemment la cellule élémentaire.



## **Deuxième partie**

# **La méthode des sources fictives pour la résolution numérique de problèmes d'électromagnétisme**





## Chapitre 3

# Méthode des sources fictives *usuelle*

### Sommaire

3.1 Principe et originalité de la méthode . . . . .	35
3.2 Contexte d'étude . . . . .	37
3.3 Reformulation des équations de Maxwell . . . . .	38
3.4 L'équation de Helmholtz . . . . .	40
3.5 Cas élémentaire de la diffraction par un ensemble de tiges parallèles . . . . .	41
3.6 Modélisation numérique . . . . .	47
3.7 Résolution numérique . . . . .	49
3.8 Validation physique . . . . .	56
3.9 Illustration et validation de la méthode des sources fictives . . . . .	59

**Principe de Huygens-Fresnel** « *Les vibrations d'une onde lumineuse dans chacun de ses points peuvent être regardées comme la somme des mouvements élémentaires qu'y enverraient au même instant, en agissant isolément, toutes les parties de cette onde considérée dans une quelconque de ses positions antérieures.* » [E12]

### 3.1 Principe et originalité de la méthode

La méthode des sources fictives permet, en premier lieu, de traiter le problème de la diffraction d'un faisceau lumineux par des objets élémentaires de forme *quelconque* mais de nature *homogène*, le tout étant homogène par morceaux. Notons qu'elle existe aussi en acoustique sous la dénomination « *exploding reflector concept* ».

S'inspirant du principe de Huygens-Fresnel, le postulat de base est le suivant : la distribution de champ électromagnétique dans chaque milieu homogène (objets diffractants ainsi que milieu ambiant) peut être décrite comme la combinaison linéaire des champs rayonnés par une collection de sources, alors dites *fictives*, affectées au milieu considéré. Une source affectée à un milieu rayonne *exclusivement* dans celui-ci et son type (source ponctuelle, source filaire, nappe de courant, etc.) peut être adapté à la configuration pour une utilisation efficace de la méthode.

Il est admis que ces ensembles de sources — leur rayonnement — forment autant de bases sur lesquelles développer le champ dans chaque milieu homogène, bases dont chaque élément est choisi de telle sorte qu'il vérifie les conditions de rayonnement de Sommerfeld [E13] (si nécessaire) ainsi que l'équation de Helmholtz. En conséquence, cette dernière se trouve vérifiée *a priori*.

Puisque, de fait, la propagation est assurée et puisque la résolution d'un problème de diffraction consiste à résoudre les équations de Maxwell *partout*, les seules équations qu'il reste à vérifier sont les conditions de continuité du champ au passage d'un milieu homogène à un autre.

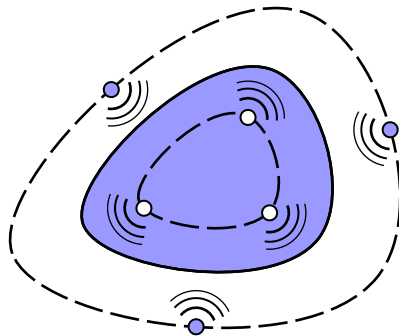


Figure 3.1 – *Sources fictives et milieux complémentaires.*

L'une des principales caractéristiques de la méthode est sa *semi-analyticité*, contrepartie de sa *généricité*. En effet, l'intérêt majeur de celle-ci consiste en la résolution de problèmes de diffraction par un ou plusieurs objets quelconques dont la forme n'est pas nécessairement connue à l'avance. L'implication directe de ceci est le besoin de recourir à un maillage discret d'interface sur lequel vérifier les conditions de continuité applicables au champ. C'est en cela que la méthode des sources fictives diffère des méthodes purement analytiques (telle la méthode modale) pour lesquelles les fonctions de base employées sont parfaitement adaptées aux géométries traitées (des tiges de section circulaire voire elliptique dans le cas de la méthode multipolaire, des réseaux lamellaires dans le cas de la méthode modale, etc.). Les méthodes semi-analytiques dont la méthode des sources fictives fait partie en sortent moins « nobles », dans la mesure où la part de numérique prend le pas sur ce qui est alloué aux mathématiques, mais ont l'avantage indéniable de ne pas être dédiées à des configurations particulières.

De surcroît, puisque le maillage est celui de l'interface entre deux domaines, il ne peut être que linéique ou surfacique. Cela constitue un avantage non-négligeable vis-à-vis de la méthode des éléments finis pour laquelle, *a priori*, l'espace sur lequel on travaille doit être discrétisé entièrement (en surface ou en volume selon le cas). Une série d'objets très éloignés devant la longueur d'onde d'étude ou bien une structure infinie comme un réseau de diffraction ou un cristal photonique seraient des cas complexes à traiter sans utiliser de maillages avancés.

Naturellement, et ceci quelle que soit la méthode, la difficulté du problème croît avec le nombre d'objets, leur taille caractéristique devant la longueur d'onde d'étude, le degré de complexité de leur pourtour, le contraste avec le milieu ambiant, etc.

Il est à noter que, dans le domaine des micro-ondes, la méthode des sources fictives est particulièrement adaptée au traitement de problèmes faisant intervenir du métal, auquel on substitue avantageusement le modèle du conducteur parfait dont la définition se trouve dans le premier chapitre.

Le déroulement de ce chapitre se fait en trois temps.

1. Le principe de la méthode des sources fictives — c.-à-d. les équations à résoudre ainsi que les fonctions de base employées — est exposé.

2. Le système issu de cette méthode faisant l'objet d'un traitement numérique, plusieurs algorithmes de résolution susceptibles d'être utilisés sont décrits.
3. Enfin, quelques résultats types illustrent la méthode.

## 3.2 Contexte d'étude

### 3.2.1 Objets cylindriques

Nous nous limitons à l'étude d'objets cylindriques au sens mathématique du terme (donc infiniment longs). Ce faisant, nous éliminons les objets purement tridimensionnels, c.-à-d. n'ayant aucune direction d'invariance, dont l'étude aussi bien que les applications potentielles sortent du cadre de cette thèse. Des travaux — [N2] et [A3] — impliquant simultanément sources fictives et géométries véritablement tridimensionnelles ont d'ores-et-déjà été effectués et le lecteur concerné pourra s'y référer. *A fortiori*, l'utilisation, avec précaution, de logiciels commerciaux (lesquels généralement basés sur la méthode des éléments finis) n'est pas à exclure dans le cadre de l'étude de structures réellement complexes. Ce sera le cas par la suite.

Ainsi, chaque tige ou cylindre se définit par

1. une génératrice, l'axe  $z$  ou direction *longitudinale* ;
2. une directrice, incluse dans le plan  $xy$  ou plan *transverse* (ou encore de section droite).

Dans le plan, dont la cote suivant  $z$  est nulle, la directrice enlace un domaine  $\Omega$  *ouvert et simplement connexe* représentatif de l'objet.

### Notation particulière

Si  $\mathbf{U}$  est un vecteur de dimension trois ; il est possible que nous notions  $\mathbf{U}_{\parallel}$  et  $\mathbf{U}_{\perp}$  ses composantes longitudinale et transverse respectivement.

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_{\parallel} + \mathbf{U}_{\perp}, \quad (3.2.1)$$

$$\mathbf{U}_{\parallel} = U_z \mathbf{e}_z, \quad (3.2.2)$$

$$\mathbf{U}_{\perp} = U_x \mathbf{e}_x + U_y \mathbf{e}_y. \quad (3.2.3)$$

De la même manière, introduisons deux opérateurs différentiels transverses :

- le « gradient transverse »,

$$\nabla_{\perp} = \mathbf{e}_x \partial_x + \mathbf{e}_y \partial_y ; \quad (3.2.4)$$

- le « laplacien transverse »,

$$\Delta_{\perp} = \nabla_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} = \partial_x^2 + \partial_y^2. \quad (3.2.5)$$

### 3.2.2 Milieux optiques

Dans l'espace, les grandeurs physiques sont invariantes selon  $z$ . En particulier, si la variable **complexe**  $\nu$  représente une permittivité diélectrique (notée  $\varepsilon$ ) ou une perméabilité magnétique (notée  $\mu$ ),

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \nu(x, y, z) = \nu(x, y), \quad (3.2.6)$$

avec  $\text{Im}(\nu) > 0$ . De plus, et ensuite, chaque milieu sera considéré comme **linéaire**, **homogène** et **isotrope**. Aucune hypothèse n'est faite sur leur absorption éventuelle. Sauf mention contraire, permittivités aussi bien que perméabilités seront éléments de  $\mathbb{C}$ .

Si l'on dispose  $N$  objets disjoints (et indexés par l'entier  $j$ ) dans l'espace, alors,

$$\forall j \in \{1, \dots, N\}, \forall (x, y) \in \Omega_j, \nu(x, y) = \nu_j. \quad (3.2.7)$$

### 3.3 Reformulation des équations de Maxwell

#### 3.3.1 Les champs transverses en fonction des longitudinaux

Imposer une direction d'invariance est une contrainte géométrique qui nous permet de réécrire les équations de Maxwell harmoniques sous une forme simplifiée. Le développement d'un code numérique à partir de cette nouvelle forme en sort grandement facilitée.

Considérons un milieu diélectrique dans lequel se propage une onde plane de pulsation  $\omega$  et définissons le « ka » de ce milieu par

$$k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon}. \quad (3.3.1)$$

La coupure adoptée pour étendre la fonction « racine » aux nombres complexes est le demi-axe réel positif — de telle sorte que  $\text{Im}(k) > 0$  — et l'origine est point de branchement.

Toute grandeur physique étant indépendante de la variable  $z$ , considérer la transformée de Fourier (partielle) par rapport à cette variable nous permet d'exprimer simplement la dépendance en  $z$  des six composantes du champ :  $e^{ik_z z}$ . Ainsi, cela implique directement

$$\partial_z \equiv ik_z \quad (3.3.2)$$

où  $k_z$  représente la composante longitudinale d'un certain vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ . Projetons les équations de Maxwell sur la base  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ .

$$\partial_y E_z - ik_z E_y = i\omega \mu H_x, \quad (3.3.3)$$

$$ik_z E_x - \partial_x E_z = i\omega \mu H_y, \quad (3.3.4)$$

$$\partial_x E_y - \partial_y E_x = i\omega \mu H_z, \quad (3.3.5)$$

$$\partial_y H_z - ik_z H_y = -i\omega \varepsilon E_x, \quad (3.3.6)$$

$$ik_z H_x - \partial_x H_z = -i\omega \varepsilon E_y, \quad (3.3.7)$$

$$\partial_x H_y - \partial_y H_x = -i\omega \varepsilon E_z. \quad (3.3.8)$$

Combinées, les équations (3.3.4) et (3.3.6) donnent

$$H_y = \frac{1}{i(k_z^2 - \omega^2 \mu \varepsilon)} (\omega \varepsilon \partial_x E_z + k_z \partial_y H_z). \quad (3.3.9)$$

De même, les équations (3.3.3) et (3.3.7) prises ensemble donnent

$$H_x = \frac{1}{i(k_z^2 - \omega^2 \mu \varepsilon)} (k_z \partial_x H_z - \omega \varepsilon \partial_y E_z). \quad (3.3.10)$$

Il suffit de considérer quelques changements de variables bien connus pour que suivent des relations équivalentes pour le champ électrique transverse.

$$E_y = \frac{1}{i(k_z^2 - \omega^2 \mu \varepsilon)} (-\omega \mu \partial_x H_z + k_z \partial_y E_z), \quad (3.3.11)$$

$$E_x = \frac{1}{i(k_z^2 - \omega^2 \mu \varepsilon)} (k_z \partial_x E_z + \omega \mu \partial_y H_z). \quad (3.3.12)$$

### 3.3.2 Choix de normalisation

Afin d'éviter, dans la mesure du possible, d'éventuels problèmes numériques (mauvais conditionnement d'une matrice, limite de précision d'une machine, etc.) il est préférable de manier des variables ayant même ordre de grandeur. Dans le système international d'unités, les constantes fondamentales qui nous intéressent valent

$$c_0 = 299792458 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}, \quad (3.3.13)$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}, \quad (3.3.14)$$

$$\varepsilon_0 \simeq 8.85 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}. \quad (3.3.15)$$

Cependant, il est judicieux de s'inspirer du système d'unités relativistes de Heaviside-Lorentz pour lequel ces trois constantes sont normalisées à 1.

$$c_0 = \varepsilon_0 = \mu_0 = 1. \quad (3.3.16)$$

Il s'ensuit que l'impédance du vide est unitaire (champs électrique et magnétique ont même ordre de grandeur) et la distinction entre permittivités (ou perméabilités) absolues et relatives n'existe plus. De même, cela implique que la pulsation  $\omega$  s'identifie à la constante de propagation dans le vide  $k_0$ ,

$$\omega \equiv k_0. \quad (3.3.17)$$

Profitons-en pour définir une constante de propagation *réduite*<sup>1</sup>  $\tilde{k}$  ou constante de propagation *dans le plan transverse* par

$$\tilde{k}^2 = k^2 - k_z^2. \quad (3.3.18)$$

Avec cette notation, les quatre expressions concernant les composantes transverses du champ deviennent

$$E_x = \frac{i}{\tilde{k}^2} (k_z \partial_x E_z + \omega \mu \partial_y H_z), \quad (3.3.19)$$

$$E_y = \frac{i}{\tilde{k}^2} (-\omega \mu \partial_x H_z + k_z \partial_y E_z), \quad (3.3.20)$$

$$H_x = \frac{i}{\tilde{k}^2} (k_z \partial_x H_z - \omega \varepsilon \partial_y E_z), \quad (3.3.21)$$

$$H_y = \frac{i}{\tilde{k}^2} (\omega \varepsilon \partial_x E_z + k_z \partial_y H_z). \quad (3.3.22)$$

Les mêmes écrites de manière condensée deviennent

$$\begin{cases} \mathbf{E}_\perp = \frac{i}{\tilde{k}^2} (k_z \nabla_\perp E_z - \mu \omega \mathbf{e}_z \times \nabla_\perp H_z), \\ \mathbf{H}_\perp = \frac{i}{\tilde{k}^2} (k_z \nabla_\perp H_z + \varepsilon \omega \mathbf{e}_z \times \nabla_\perp E_z). \end{cases} \quad (3.3.23)$$

## Conclusion

Du fait de l'invariance des objets suivant la variable  $z$ , nous sommes à même d'exprimer les composantes transverses du champ en fonction de ses composantes longitudinales. Initialement, le problème comportait **six** inconnues **liées** ; il n'en comporte plus que **deux libres**.

<sup>1</sup> Afin de ne pas multiplier les indices, il est plus commode de la noter ainsi plutôt que «  $k_\perp$  ».

## 3.4 L'équation de Helmholtz

### 3.4.1 Énoncé

Des équations de Maxwell découle l'équation de Helmholtz régissant la propagation de chacune des composantes du champ électromagnétique. Prenons le rotationnel de chacune des deux équations de Maxwell (1.2.2). Il vient

$$\Delta \mathbf{U} + \omega^2 \mu \varepsilon \mathbf{U} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{E}, \mathbf{H}. \quad (3.4.1)$$

Les deux équations précédentes prises pour les composantes longitudinales (qui seules nous intéressent désormais) deviennent,

$$[\Delta + k^2] U_z(x, y) e^{ik_z z} = 0, \quad (x, y) \in \Omega. \quad (3.4.2)$$

La géométrie étant invariante suivant  $z$ , il nous suffit de résoudre le problème dans le plan transverse  $xy$ . L'équation précédente se transforme en

$$[\Delta_\perp + \tilde{k}^2] U_z = 0. \quad (3.4.3)$$

### 3.4.2 Solutions de l'équation de Helmholtz

Exprimée en termes de coordonnées cylindriques, dans le système  $(r, \theta)$ , la théorie de Lorenz-Mie [E14] nous permet de résoudre l'équation de Helmholtz (3.4.3) dans un certain domaine  $\Omega$  en séparant les variables radiale et angulaire.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial U_z}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_z}{\partial \theta^2} + \tilde{k}^2 U_z = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega. \quad (3.4.4)$$

Les solutions de cette équation peuvent s'exprimer sous la forme d'harmoniques cylindriques  $U_{z,p}$  centrées en un point quelconque  $\mathbf{r}_0$  hors de  $\Omega$  et repérées par l'entier  $p$ .

$$U_{z,p}(\mathbf{r}) = V_{z,p}(\tilde{k} \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|) e^{ip(\theta - \theta_0)}, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad (3.4.5)$$

où  $\theta_0 = \text{angle}(\mathbf{e}_x, \mathbf{r}_0)$ .

Dans le cas général, la partie radiale de la solution,  $V_z$ , est une combinaison linéaire des fonctions de Bessel de première espèce (les fonctions de Bessel à proprement parler) et des fonctions de Bessel de seconde espèce (les fonctions de Neumann).

$$V_{z,p}(\tilde{k} \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|) = \alpha_p J_p(\tilde{k} \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|) + \beta_p N_p(\tilde{k} \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|), \quad (3.4.6)$$

avec  $(\alpha_p)$  et  $(\beta_p)$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . La méthode des sources fictives impose que la solution vérifie les conditions de rayonnement de Sommerfeld — condition d'onde sortante et décroissance en  $O(1/r)$ .

Parmi toutes les combinaisons linéaires possibles, la méthode des sources fictives fait apparaître, par le biais des coefficients  $\alpha_p$  et  $\beta_p$ , les fonctions de Bessel de troisième espèce dites fonctions de Hankel (se référer à la section B.1 en annexe pour plus de détails). Avec la dépendance temporelle choisie, les fonctions de Hankel de deuxième espèce ( $H_p^{(2)}$ ) sont des ondes « entrantes » qui ne vérifient pas les conditions de rayonnement de Sommerfeld. Elles ne présentent pas d'intérêt dans la formulation actuelle de la méthode des sources fictives et nous nous restreignons aux fonctions de Hankel de première espèce ( $H_p^{(1)}$ ).

Le champ s'exprime alors sous la forme d'une somme infinie d'harmoniques ou *pôles*. Il vient

$$U_z(\mathbf{r}) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} u_p H_p^{(1)}(\tilde{k}\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|) e^{ip(\theta - \theta_0)}, \quad \mathbf{r} \in \Omega, \quad \mathbf{r}_0 \notin \Omega, \quad (3.4.7)$$

avec  $(u_p)$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ .  $U_z$  et  $(u_p)$  sont liés de telle sorte que  $[E_z, (e_p)]$  vaut pour le champ électrique et  $[H_z, (h_p)]$  pour le champ magnétique.

Cette somme sera nécessairement tronquée au moment de passer à l'étape numérique ; aussi, nous prendrons constamment un nombre impair de pôles :

$$2P + 1, \quad P \in \mathbb{N}. \quad (3.4.8)$$

Finalement, nous prendrons

$$U_z(\mathbf{r}) = \sum_{p=-P}^P u_p H_p^{(1)}(\tilde{k}\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|) e^{ip(\theta - \theta_0)}, \quad \mathbf{r} \in \Omega, \quad \mathbf{r}_0 \notin \Omega, \quad (3.4.9)$$

comme étant le champ diffracté en  $\mathbf{r}$  par un **multipôle** d'ordre  $2P + 1$  placé en  $\mathbf{r}_0$ .

*Mathématiquement*, ces solutions constituent une famille génératrice sur laquelle on peut décomposer le champ *diffracté* dans un certain domaine homogène ; *numériquement*, cela revient à placer des sources *fictives* dans son complémentaire. Le problème qui sera l'objet d'un traitement numérique est de trouver une projection adéquate du champ sur cette base — c.-à-d. trouver les deux ensembles  $(e_p)$  et  $(h_p)$  — de telle sorte qu'il respecte les conditions de continuité évoquées dans le premier chapitre.

**Remarque** Si la forme de l'objet présente des symétries, il se peut que la solution au problème ne soit pas unique et que plusieurs projections permettent de reconstruire un même champ. Ces solutions multiples peuvent correspondre à des solutions physiques coexistantes ou bien à des dégénérescences numériques. Ces dernières peuvent être levées en désymétrisant la configuration (*e. g.* en décalant une source de sa position initiale).

## 3.5 Cas élémentaire de la diffraction par un ensemble de tiges parallèles

### 3.5.1 Définition des différents domaines

Soit  $\Omega_e$  le domaine du milieu ambiant occupant, dans un premier temps, l'espace  $\mathbb{R}^2$ . On le caractérise par une permittivité diélectrique  $\varepsilon_e$  ainsi qu'une perméabilité magnétique  $\mu_e$  toutes deux prises réelles<sup>2</sup>. À présent, plaçons (parallèlement à  $z$ )  $N$  tiges de sections droites  $(\Omega_n)$  arbitraires. Leurs permittivités et perméabilités sont  $\varepsilon_n$  et  $\mu_n$  respectivement. Désormais, et la question des frontières laissée de côté, le milieu ambiant se définit comme l'espace privé des objets diffractants.

<sup>2</sup>Le milieu ambiant n'est pas dissipatif car il est le support du champ incident.



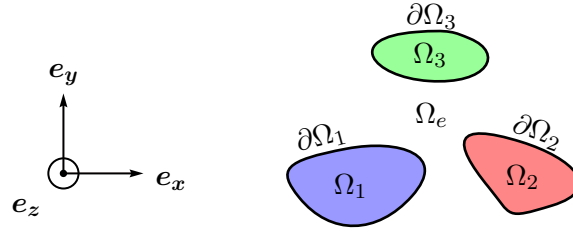


Figure 3.2 – Domaines pour trois cylindres.

Rappelons que les domaines  $(\Omega_n)$  et  $\Omega_e$  sont des ouverts; or la frontière entre un objet et le milieu ambiant est de premier intérêt. Aussi nous la nommons  $\partial\Omega_n$  et l'espace s'organise comme suit<sup>3</sup>

$$\Omega_i = \bigcup_{n=1}^N \Omega_n, \quad \partial\Omega = \bigcup_{n=1}^N \partial\Omega_n, \quad (3.5.1)$$

soit

$$\Omega_i \cup \Omega_e \cup \partial\Omega = \mathbb{R}^2. \quad (3.5.2)$$

### 3.5.2 Champ incident en monture conique

#### Onde plane

La structure est éclairée par une onde plane monochromatique dont l'incidence est quelconque — un abus de langage issu de la physique des réseaux veut que la configuration soit dite « conique » — et dont **le support est le milieu ambiant**. Le vecteur d'onde associé au champ incident,  $\mathbf{k}^{inc}$ , a, *a priori*, trois composantes non-nulles et celles-ci sont fonctions de deux angles, le couple  $(\theta^{inc}, \phi^{inc})$ .

$$k_x^{inc} = k_e \sin \theta^{inc} \cos \phi^{inc}, \quad (3.5.3)$$

$$k_y^{inc} = -k_e \cos \theta^{inc}, \quad (3.5.4)$$

$$k_z^{inc} = -k_e \sin \theta^{inc} \sin \phi^{inc}, \quad (3.5.5)$$

où  $k_e = \sqrt{\varepsilon_e \mu_e} k_0$ .

L'amplitude du champ électrique incident est choisie unitaire et le système d'unités que nous avons choisi dans la sous-section 3.3.2 implique (car  $\eta_0 = 1$ ) que celle du champ magnétique est égale à l'inverse de l'impédance relative au milieu dans lequel l'onde se propage, le milieu « extérieur ».

$$\|\mathbf{E}_0^{inc}\| = 1 \text{ et } \|\mathbf{H}_0^{inc}\| = \frac{1}{\eta_e}, \quad (3.5.6)$$

où  $\eta_e = \sqrt{\mu_e / \varepsilon_e}$ .

La polarisation de l'onde incidente est choisie rectiligne et le champ électrique est pris comme référence. La direction de celui-ci fait un angle  $\delta^{inc}$  avec la normale au plan d'incidence.

$$E_{0,x}^{inc} = \cos \theta^{inc} \cos \phi^{inc} \sin \delta^{inc} + \sin \phi^{inc} \cos \delta^{inc}, \quad (3.5.7)$$

$$E_{0,y}^{inc} = \sin \theta^{inc} \sin \delta^{inc}, \quad (3.5.8)$$

$$E_{0,z}^{inc} = -\cos \theta^{inc} \sin \phi^{inc} \sin \delta^{inc} + \cos \phi^{inc} \cos \delta^{inc}. \quad (3.5.9)$$

<sup>3</sup>Le domaine  $\Omega_i$  n'est pas nécessairement connexe.

Une onde est dite TE (TM) si son champ électrique (magnétique) est orthogonal au plan d'incidence, soit  $\delta^{inc}$  pris nul (égal à  $\pi/2$ ).

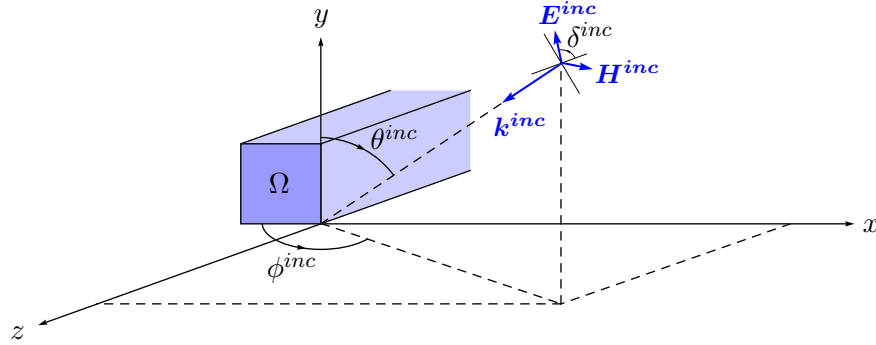


Figure 3.3 – Définition des angles pour l'incidence conique.

La géométrie étudiée nous invite à exprimer le vecteur d'onde incident comme la somme d'un vecteur d'onde transverse réduit et d'un vecteur d'onde longitudinal,

$$\mathbf{k}^{inc} = \tilde{\mathbf{k}}^{inc} + \mathbf{k}_{\parallel}^{inc}. \quad (3.5.10)$$

Suit la définition formelle du champ incident considéré dans le plan transverse.

$$\forall \mathbf{r} \in \Omega_e, \mathbf{U}^{inc}(\mathbf{r}) = \mathbf{U}_0^{inc} e^{i\tilde{\mathbf{k}}^{inc} \cdot \mathbf{r}}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{E}, \mathbf{H}; \quad (3.5.11)$$

où  $\mathbf{U}_0^{inc}$  est un vecteur constant.

### Autres types de champ incident

Nous avons choisi l'onde plane pour sa simplicité d'écriture et pour sa canonicité, mais il est tout à fait envisageable d'éclairer la structure par une onde plus complexe (*e. g.* cylindrique, sphérique, etc.) ou même un faisceau (*e. g.* gaussien). À partir du moment où l'on dispose d'une expression analytique du champ incident, il suffit de le « projeter » sur la surface de contact entre le milieu ambiant et les objets. Bien qu'il faille à nouveau normaliser l'énergie incidente à l'unité, en soi, la résolution du problème ne change pas.

### 3.5.3 Expression des champs diffractés

Plaçons  $M_n$  sources multipolaires à l'extérieur de l'objet  $n$  — repérées par  $(\mathbf{s}_{e,n,m})$  — et autant à l'intérieur — repérées par  $(\mathbf{s}_{i,n,m})$ . Tout multipôle indexé par  $m$  possède un nombre impair d'harmoniques :

$$2P_m + 1, \quad P_m \in \mathbb{N}. \quad (3.5.12)$$

Il nous faut expliciter l'équation de Helmholtz (3.4.3) afin de prendre toutes les sources en compte. Aussi, elle se sépare naturellement en deux :

– dans le milieu ambiant,

$$\forall \mathbf{r} \in \Omega_e, \left[ \Delta_{\perp} + \tilde{k}_e^2 \right] U_{e,z}^{dif}(\mathbf{r}) = 0, \quad (3.5.13)$$

– dans la structure diffractante,

$$\forall n \in \{1, \dots, N\}, \forall \mathbf{r} \in \Omega_n, \left[ \Delta_{\perp} + \tilde{k}_n^2 \right] U_{n,z}^{dif}(\mathbf{r}) = 0, \quad (3.5.14)$$

où  $\tilde{k}_n^2 = \varepsilon_n \mu_n k_0^2 - k_z^2$  et  $U_n^{dif}$  est à la fois champ diffracté et champ total à l'intérieur de l'objet  $n$ .

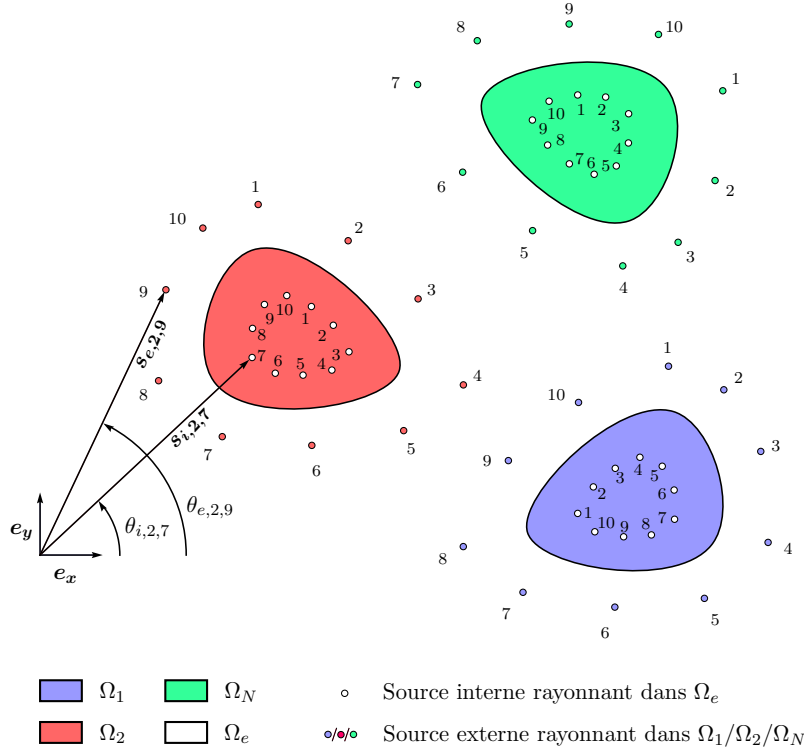


Figure 3.4 – Notations pour le repérage des sources.

### Expression des champs longitudinaux

**Dans le milieu ambiant** Dans le milieu ambiant, la composante longitudinale du champ diffracté par l'ensemble des objets est la somme des fonctions de Green  $G_{i,n,m}$  associées aux sources situées dans  $\Omega_i$  et vaut

$$\forall \mathbf{r} \in \Omega_e, U_{e,z}^{dif}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^{M_n} G_{i,n,m}(\mathbf{r}), \quad (3.5.15)$$

soit

$$\forall \mathbf{r} \in \Omega_e, U_{e,z}^{dif}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^{M_n} \sum_{p=-P_m}^{P_m} u_{i,n,m,p} H_p^{(1)}(\tilde{k}_e \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_{i,n,m}\|) e^{ip(\theta - \theta_{i,n,m})}, \quad (3.5.16)$$

où  $u_{i,n,m,p}$  est, relativement au champ  $U$ , la pondération du pôle  $p$  de la source  $m$  située à l'intérieur de l'objet  $n$  et  $\theta_{i,n,m} = \text{angle}(\mathbf{e}_x, \mathbf{s}_{i,n,m})$ .

**Dans la structure diffractante** La composante longitudinale du champ « réfracté » dans l'objet  $n$  est la somme des fonctions de Green propres à l'ensemble des sources *externes* associées à cette inclusion et vaut

$$\forall n \in \{1, \dots, N\}, \forall \mathbf{r} \in \Omega_n, U_{n,z}^{dif}(\mathbf{r}) = \sum_{m=1}^{M_n} G_{e,n,m}(\mathbf{r}), \quad (3.5.17)$$

soit

$$U_{n,z}^{dif}(\mathbf{r}) = \sum_{m=1}^{M_n} \sum_{p=-P_m}^{P_m} u_{e,n,m,p} H_p^{(1)} \left( \tilde{k}_n \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_{e,n,m}\| \right) e^{ip(\theta - \theta_{e,n,m})}, \quad (3.5.18)$$

où  $u_{e,n,m,p}$  est, relativement au champ  $\mathbf{U}$ , la pondération du pôle  $p$  de la source  $m$  située à l'extérieur de l'objet  $n$  et  $\theta_{e,n,m}$  = angle  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{s}_{e,n,m})$ .

### Expression des champs transverses

Les expressions analytiques (3.5.16) et (3.5.18) nous donnent seulement la partie longitudinale des champs électrique et magnétique. Pour ce qui est de leur partie transverse, elle se déduit du système (3.3.23). La reconstruction des quatre composantes manquantes ( $E_x^{dif}$ ,  $E_y^{dif}$ ,  $H_x^{dif}$  et  $H_y^{dif}$ ) est quelque peu fastidieuse et nécessite la définition successive de plusieurs variables. Les calculs intermédiaires sont effectués sur *une* fonction de base (indexée par le triplet  $(n, m, p)$ ) et l'expression littérale des champs transverses (alors combinaison linéaire de ces fonctions de base) sera développée dans un dernier temps.

**Dans le milieu ambiant** Considérons un point dans  $\Omega_e$  ainsi qu'un multipôle dans  $\Omega_i$ . Réintroduisons la distance qui les sépare

$$d_{i,n,m}(x, y) = \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_{i,n,m}\| = \sqrt{(x - x_{i,n,m})^2 + (y - y_{i,n,m})^2}, \quad (3.5.19)$$

définissons les « décalages » suivant  $x$  et  $y$  par

$$d_{i,n,m}^x(x) = x - x_{i,n,m}, \quad (3.5.20)$$

$$d_{i,n,m}^y(y) = y - y_{i,n,m}, \quad (3.5.21)$$

ainsi qu'un angle « réduit »

$$\vartheta_{i,n,m} = \theta - \theta_{i,n,m}. \quad (3.5.22)$$

Le système (3.3.23) fait intervenir des dérivations partielles (suivant  $x$  ou  $y$ ) portant sur les fonctions de base. En détails,

$$\begin{aligned} \partial_x \left[ H_p^{(1)} \left( \tilde{k}_e d_{i,n,m}(x, y) \right) e^{ip\vartheta_{i,n,m}} \right] &= \left[ d_{i,n,m}^x(x) A_{i,n,m,p}(x, y) - d_{i,n,m}^y(y) B_{i,n,m,p}(x, y) \right] \\ &\quad \times e^{ip\vartheta_{i,n,m}} / d_{i,n,m}(x, y), \\ \partial_y \left[ H_p^{(1)} \left( \tilde{k}_e d_{i,n,m}(x, y) \right) e^{ip\vartheta_{i,n,m}} \right] &= \left[ d_{i,n,m}^y(y) A_{i,n,m,p}(x, y) + d_{i,n,m}^x(x) B_{i,n,m,p}(x, y) \right] \\ &\quad \times e^{ip\vartheta_{i,n,m}} / d_{i,n,m}(x, y), \end{aligned} \quad (3.5.23)$$

où  $A_{i,n,m,p}(x, y)$  et  $B_{i,n,m,p}(x, y)$  sont des variables intermédiaires définies par

$$A_{i,n,m,p}(x, y) = \frac{ip}{d_{i,n,m}(x, y)} H_p^{(1)} \left( \tilde{k}_e d_{i,n,m}(x, y) \right), \quad (3.5.24)$$

$$B_{i,n,m,p}(x, y) = \frac{p H_p^{(1)} \left( \tilde{k}_e d_{i,n,m}(x, y) \right)}{d_{i,n,m}(x, y)} - \tilde{k}_e H_{p+1}^{(1)} \left( \tilde{k}_e d_{i,n,m}(x, y) \right). \quad (3.5.25)$$

De même, il est préférable de définir deux nouvelles grandeurs afin de faciliter la nouvelle écriture du système (3.3.23),

$$C_{i,n,m,p}(x, y) = \frac{i}{\tilde{k}_e^2} \frac{d_{i,n,m}^x(x) B_{i,n,m,p}(x, y) - d_{i,n,m}^y(y) A_{i,n,m,p}(x, y)}{d_{i,n,m}(x, y)} e^{ip\vartheta_{i,n,m}}, \quad (3.5.26)$$

$$D_{i,n,m,p}(x, y) = \frac{i}{\tilde{k}_e^2} \frac{d_{i,n,m}^y(x) B_{i,n,m,p}(x, y) + d_{i,n,m}^x(y) A_{i,n,m,p}(x, y)}{d_{i,n,m}(x, y)} e^{ip\vartheta_{i,n,m}}. \quad (3.5.27)$$

L'expression analytique des composantes transverses des champs diffractés dans le milieu ambiant n'est autre que

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{r} \in \Omega_e, E_{e,x}^{dif}(\mathbf{r}) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^{M_n} \sum_{p=-P_m}^{P_m} [k_z C_{i,n,m,p}(\mathbf{r}) e_{i,n,m,p} + \omega \mu_e D_{i,n,m,p}(\mathbf{r}) h_{i,n,m,p}], \\ \forall \mathbf{r} \in \Omega_e, E_{e,y}^{dif}(\mathbf{r}) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^{M_n} \sum_{p=-P_m}^{P_m} [-\omega \mu_e C_{i,n,m,p}(\mathbf{r}) e_{i,n,m,p} + k_z D_{i,n,m,p}(\mathbf{r}) h_{i,n,m,p}], \\ \forall \mathbf{r} \in \Omega_e, H_{e,x}^{dif}(\mathbf{r}) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^{M_n} \sum_{p=-P_m}^{P_m} [k_z C_{i,n,m,p}(\mathbf{r}) e_{i,n,m,p} - \omega \varepsilon_e D_{i,n,m,p}(\mathbf{r}) h_{i,n,m,p}], \\ \forall \mathbf{r} \in \Omega_e, H_{e,y}^{dif}(\mathbf{r}) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^{M_n} \sum_{p=-P_m}^{P_m} [\omega \varepsilon_e C_{i,n,m,p}(\mathbf{r}) e_{i,n,m,p} + k_z D_{i,n,m,p}(\mathbf{r}) h_{i,n,m,p}]. \end{aligned} \quad (3.5.28)$$

**Dans la structure diffractante** Dans ce cas, les sources utilisées ne sont plus « internes » mais « externes » et le « ka » n'est plus celui du milieu ambiant mais celui d'un objet. Il convient de faire certaines substitutions au niveau des différentes définitions qui précèdent.

$$\tilde{k}_e \leftarrow \tilde{k}_n, \quad (3.5.29)$$

$$(\mu_e, \varepsilon_e) \leftarrow (\mu_n, \varepsilon_n), \quad (3.5.30)$$

$$(E_{e,x}^{dif}, E_{e,y}^{dif}, H_{e,x}^{dif}, H_{e,y}^{dif}) \leftarrow (E_{n,x}^{dif}, E_{n,y}^{dif}, H_{n,x}^{dif}, H_{n,y}^{dif}), \quad (3.5.31)$$

$$\mathbf{s}_{i,n,m} \leftarrow \mathbf{s}_{e,n,m}. \quad (3.5.32)$$

Ces changements permettent de rapidement déduire l'expression du champ transverse dans la structure diffractante :

$$\begin{aligned} \forall n \in \{1, \dots, N\}, \\ \forall \mathbf{r} \in \Omega_n, E_{n,x}^{dif}(\mathbf{r}) &= \sum_{m=1}^{M_n} \sum_{p=-P_m}^{P_m} [k_z C_{e,n,m,p}(\mathbf{r}) e_{e,n,m,p} + \omega \mu_n D_{e,n,m,p}(\mathbf{r}) h_{e,n,m,p}], \\ \forall \mathbf{r} \in \Omega_n, E_{n,y}^{dif}(\mathbf{r}) &= \sum_{m=1}^{M_n} \sum_{p=-P_m}^{P_m} [-\omega \mu_n C_{e,n,m,p}(\mathbf{r}) e_{e,n,m,p} + k_z D_{e,n,m,p}(\mathbf{r}) h_{e,n,m,p}], \\ \forall \mathbf{r} \in \Omega_n, H_{n,x}^{dif}(\mathbf{r}) &= \sum_{m=1}^{M_n} \sum_{p=-P_m}^{P_m} [k_z C_{e,n,m,p}(\mathbf{r}) e_{e,n,m,p} - \omega \varepsilon_n D_{e,n,m,p}(\mathbf{r}) h_{e,n,m,p}], \\ \forall \mathbf{r} \in \Omega_n, H_{n,y}^{dif}(\mathbf{r}) &= \sum_{m=1}^{M_n} \sum_{p=-P_m}^{P_m} [\omega \varepsilon_n C_{e,n,m,p}(\mathbf{r}) e_{e,n,m,p} + k_z D_{e,n,m,p}(\mathbf{r}) h_{e,n,m,p}]. \end{aligned} \quad (3.5.33)$$

### 3.5.4 Champ total

Le champ total est défini partout. Dans le milieu ambiant, il est la somme du champ incident et du champ diffracté par l'objet,

$$\forall \mathbf{r} \in \Omega_e, \mathbf{U}^{tot}(\mathbf{r}) = \mathbf{U}_e^{tot}(\mathbf{r}) = \mathbf{U}^{inc}(\mathbf{r}) + \mathbf{U}_e^{dif}(\mathbf{r}) ; \quad (3.5.34)$$

et, dans un objet, il n'a qu'une contribution, à savoir le champ « réfracté » dans cet objet,

$$\forall n \in \{1, \dots, N\}, \forall \mathbf{r} \in \Omega_n, \mathbf{U}^{tot}(\mathbf{r}) = \mathbf{U}_n^{tot}(\mathbf{r}) = \mathbf{U}_n^{dif}(\mathbf{r}), \quad (3.5.35)$$

où  $\mathbf{U} = \mathbf{E}, \mathbf{H}$ .

## 3.6 Modélisation numérique

### 3.6.1 Choix du langage

#### Fortran 90

Les avancées apportées par la version 90 de Fortran sont d'importance et justifient l'abandon de la version 77. De plus, les compilateurs récents (GNU, Intel, etc.) tolèrent aussi bien Fortran 77 et 90 et la liaison entre une bibliothèque « 77 » et un programme « 90 » ne pose pas problème. Parmi les avancées notables

- l'allocation dynamique de mémoire, grâce à l'attribut `allocatable` ;
- les structures, grâce au type générique `type`.

La définition de types s'avère particulièrement utile dans notre situation : lors de leur déclaration, ces nouveaux types peuvent s'encapsuler les uns les autres. Ainsi, une tige sera principalement un indice optique et un profil, un profil sera lui-même un ensemble de sections, une section un ensemble de points, etc.

#### Librairies scientifiques

De nombreux algorithmes ont déjà été pensés et un certain nombre de routines regroupées en librairies existent. Aussi, il est crucial d'y faire appel pour gagner en temps de calcul comme en temps de programmation. La méthode des sources fictives s'appuie

1. sur le calcul de fonctions de Hankel à argument complexe,
2. sur la résolution de systèmes linéaires complexes aux *propriétés mathématiques quelconques* de prime abord.

Les fonctions spéciales (de Bessel, de Hankel, etc.) ont été codées en Fortran 77 par D. E. Amos et plus récemment en C. Leur version Fortran a été intégrée depuis à la librairie SLATEC (*Sandia Los Alamos Air Force Weapons Laboratory Technical Exchange Committee*) [N3].

La librairie LAPACK (*Linear Algebra PACKage*) codée dans un premier temps en Fortran 77, puis en Fortran 90 regroupe énormément de routines dédiées, entre autres, à la résolution de systèmes linéaires. Existe un portage en C plus récent sous la forme de la librairie CLAPACK. Cependant, la version stable et couramment utilisée par la communauté scientifique depuis des années reste celle en Fortran 77, notre choix. Il est à noter qu'Intel distribue un compilateur Fortran ainsi qu'une version de LAPACK optimisée pour ses architectures processeur sous la forme de la librairie Intel MKL (*Math Kernel Library*) [N4].

### 3.6.2 Profils et sources

#### Discrétisation

Le profil d'un objet étant continu, il faut le discrétiser suivant une certaine méthode. Ces dernières sont nombreuses et deux d'entre elles sont présentées en annexe (section C.1). La vérification des conditions de continuité se fera non pas sur  $\partial\Omega$  mais sur un ensemble de points discrets. Cependant, rien n'est spécifié quant au comportement du champ entre deux points de discrétisation successifs. On pourrait ajouter des conditions supplémentaires pour accélérer la convergence des résultats (une condition sur la continuité du champ liée à la tangente au profil par exemple) mais l'efficacité de cela reste à prouver. Une discrétisation plus fine parera aux éventuels problèmes apparaissant entre points trop éloignés.

#### Quantité de points

Le nombre de points sur le profil est arbitraire cependant il conditionne la précision des résultats. Il va sans dire que le temps de résolution croît avec le nombre de points et il convient de choisir une discrétisation ni trop lâche, ni trop fine. Un espacement de l'ordre d'un dixième de la longueur d'onde d'étude entre deux points successifs est raisonnable.

#### Quantité de sources

La quantité de sources associées à l'objet est arbitraire cependant elle doit être fixée de telle sorte que le système linéaire à résoudre ne soit pas sous-déterminé. Le nombre est variable puisque ce n'est pas tant le nombre de sources qui importe mais le nombre de pôles qui, eux, constituent nos inconnues. Pour fixer les idées, un multipôle d'ordre quinze sera à même de simuler la diffraction de l'onde incidente par une tige de section circulaire<sup>4</sup> tandis que cent monopôles seront nécessaires pour simuler celle d'une tige de section carrée aux dimensions équivalentes.

#### Politique de placement des points et des sources

C'est la difficulté de la méthode des sources fictives. Souvent, les ouvrages traitant de méthodes numériques similaires à celle que nous employons (citons les *Generalized Multipole Techniques*, les *Multiple Multipole Methods*, etc.) y consacrent plusieurs chapitres.

De l'expérience et de la littérature [N5, N6], quelques règles ressortent mais ne sauraient être vraies dans tous les cas.

1. Garder les points équirépartis autant que possible sur chaque portion de droite.
2. Resserrer graduellement les points dans les angles.
3. Eviter de placer un point à l'endroit même d'un angle qui, *a fortiori*, n'a pas d'existence physique.
4. Approcher graduellement les sources des angles.
5. Envelopper les singularités [N7, N8].
6. Garder les sources à une distance raisonnable du profil.
7. Utiliser un nombre de sources raisonnable de telle sorte que leurs « zones d'influence » respectives ne se chevauchent pas.

---

<sup>4</sup>Dont le diamètre est de l'ordre de la longueur d'onde du champ incident.

Malgré ces quelques préceptes (qui ne sont qu'empiriques), une discrétisation idéale et systématique d'un profil aussi bien qu'une règle de placement des sources n'existent pas. La section C.2 en annexe en présente deux. Le nombre de points comme de sources ainsi que leur emplacement respectif doivent être choisis avec discernement. Ces données conditionneront la qualité des résultats ainsi que leur convergence. Cela mis à part, plus l'objet sera complexe, plus complexe sera sa discrétisation, plus complexe sera la distribution de sources, plus lente sera la convergence.

## 3.7 Résolution numérique

### 3.7.1 Formulation numérique des conditions de continuité

Nous l'avons dit, les équations à résoudre portent sur la continuité de certaines composantes du champ électromagnétique et ce à l'interface entre deux objets. D'un point de vue numérique, ces interfaces sont constituées d'ensembles de points discrets.

Le profil d'un objet peut se subdiviser en sections et chaque section se voit affecter une catégorie de conditions de continuité. Le fait d'introduire des sections laisse énormément de degrés de liberté quant aux configurations modélisables. Cela permet notamment de créer des objets à la fois opaques et infiniment fins (des miroirs ou des lames métalliques par exemple).

Si le profil de l'objet  $n$  se subdivise en  $S_n$  sections et si chaque section est décrite par  $P_{n,s}$  points ( $S_n$  et  $P_{n,s}$  pris entiers et non nuls), alors les points sont indexés de la sorte :

$$(\mathbf{r}_{n,s,p}) \text{ où } n \in \{1, \dots, N\}, s \in \{1, \dots, S_n\} \text{ et } p \in \{1, \dots, P_{n,s}\}. \quad (3.7.1)$$

Les conditions de continuité à respecter sur la section  $s$  de l'objet  $n$  dépendent de la nature de celle-ci et font intervenir, suivant la configuration, la définition du champ total dans le milieu ambiant (3.5.34) ou dans un objet (3.5.35). En détails<sup>5</sup>, si la section considérée sépare

- deux diélectriques, alors

$$\begin{aligned} \forall p \in \{1, \dots, P_{n,s}\}, \mathbf{n}_{\mathbf{r}_{n,s,p}} \times [\mathbf{E}_{\parallel}^{tot}]_{\mathbf{r}_{n,s,p}} &= \mathbf{0}, \mathbf{n}_{\mathbf{r}_{n,s,p}} \times [\mathbf{E}_{\perp}^{tot}]_{\mathbf{r}_{n,s,p}} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{n}_{\mathbf{r}_{n,s,p}} \times [\mathbf{H}_{\parallel}^{tot}]_{\mathbf{r}_{n,s,p}} &= \mathbf{0}, \mathbf{n}_{\mathbf{r}_{n,s,p}} \times [\mathbf{H}_{\perp}^{tot}]_{\mathbf{r}_{n,s,p}} = \mathbf{0}; \end{aligned} \quad (3.7.2)$$

- un conducteur électrique parfait d'un diélectrique, alors

$$\begin{aligned} \forall p \in \{1, \dots, P_{n,s}\}, \mathbf{n}_{\mathbf{r}_{n,s,p}} \times \mathbf{E}_{\parallel}^{tot}(\mathbf{r}_{n,s,p}) &= \mathbf{0}, \mathbf{n}_{\mathbf{r}_{n,s,p}} \times \mathbf{E}_{\perp}^{tot}(\mathbf{r}_{n,s,p}) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{n}_{\mathbf{r}_{n,s,p}} \cdot \mathbf{H}_{\perp}^{tot}(\mathbf{r}_{n,s,p}) &= 0; \end{aligned} \quad (3.7.3)$$

- un conducteur magnétique parfait d'un diélectrique, alors

$$\begin{aligned} \forall p \in \{1, \dots, P_{n,s}\}, \mathbf{n}_{\mathbf{r}_{n,s,p}} \times \mathbf{H}_{\parallel}^{tot}(\mathbf{r}_{n,s,p}) &= \mathbf{0}, \mathbf{n}_{\mathbf{r}_{n,s,p}} \times \mathbf{H}_{\perp}^{tot}(\mathbf{r}_{n,s,p}) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{n}_{\mathbf{r}_{n,s,p}} \cdot \mathbf{E}_{\perp}^{tot}(\mathbf{r}_{n,s,p}) &= 0. \end{aligned} \quad (3.7.4)$$

Remarquons que, dans le cas de matériaux parfaitement conducteurs, certaines composantes du champ sont **laissées libres** : le champ magnétique tangent pour un *PEC*, le champ électrique tangent pour un *PMC*.

<sup>5</sup>Les notations adoptées sont celles introduites en page 37.



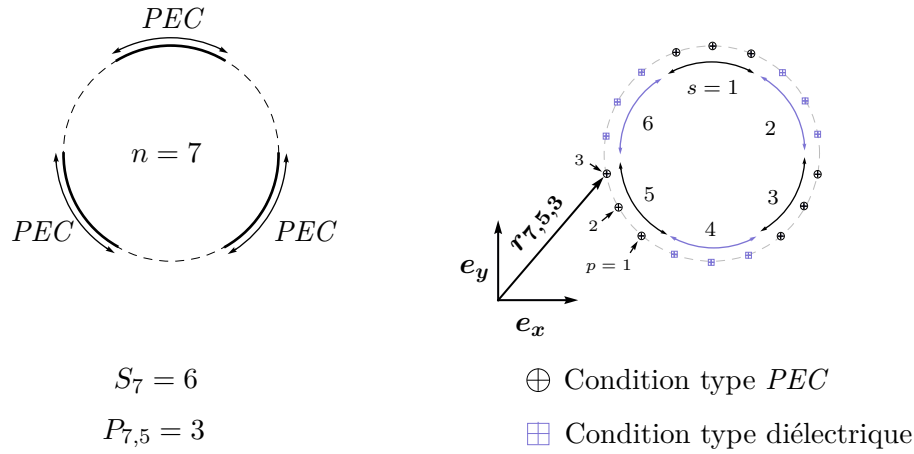


Figure 3.5 – Modélisation d'un objet diélectrique « hybride » dont certaines portions de surface sont métallisées. Dans cet exemple, l'objet 7 dispose de trois sections parfaitement conductrices : les sections 1, 3 et 5.

**Remarque** Les équations faisant intervenir les composantes longitudinales du champ électrique (magnétique), à savoir  $\mathbf{E}_{\parallel}$  ( $\mathbf{H}_{\parallel}$ ), ont pour seules inconnues les coefficients  $e_{e,n,m,p}$  et  $e_{i,n,m,p}$  ( $h_{e,n,m,p}$  et  $h_{i,n,m,p}$ ). *A contrario*, les équations faisant intervenir les composantes transverses,  $\mathbf{E}_{\perp}$  et  $\mathbf{H}_{\perp}$ , ont toutes la totalité des coefficients pour inconnues, soit  $e_{e,n,m,p}$ ,  $e_{i,n,m,p}$ ,  $h_{e,n,m,p}$  et  $h_{i,n,m,p}$ .

### Cas particulier d'une lame courbe, infiniment fine et parfaitement conductrice

Il se peut que deux objets diélectriques soient, pour une ou plusieurs sections données, séparés par une paroi parfaitement conductrice. Cela implique que, pour ces sections, les champs externes et internes « ne se voient pas » et n'ont pas à être accordés entre eux car la paroi fait *écran*. Cependant, il y a toujours lieu de vérifier les bonnes conditions de continuité mais, cette fois ci, découplées : dans un premier temps, sur la face interne de ces sections et, dans un deuxième temps, sur leur face externe.

Prenons l'exemple d'un objet diélectrique ( $n$ ) uniquement en contact avec le milieu ambiant et dont une section ( $s$ ) est choisie de nature *PEC*. La face interne de cette section « voit » le champ total « intérieur » (le champ diffracté dans l'objet) et sa face externe « voit » le champ total « extérieur » (la somme des champs diffracté et incident dans le milieu ambiant). D'où,

$$\begin{aligned}
 \forall p \in \{1, \dots, P_{n,s}\}, \quad & \mathbf{n}_{r_{n,s,p}} \times \mathbf{E}_{n,\parallel}^{dif}(\mathbf{r}_{n,s,p}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n}_{r_{n,s,p}} \times \mathbf{E}_{e,\parallel}^{tot}(\mathbf{r}_{n,s,p}) = \mathbf{0}, \\
 & \mathbf{n}_{r_{n,s,p}} \times \mathbf{E}_{n,\perp}^{dif}(\mathbf{r}_{n,s,p}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n}_{r_{n,s,p}} \times \mathbf{E}_{e,\perp}^{tot}(\mathbf{r}_{n,s,p}) = \mathbf{0}, \\
 & \mathbf{n}_{r_{n,s,p}} \cdot \mathbf{H}_{n,\perp}^{dif}(\mathbf{r}_{n,s,p}) = 0, \quad \mathbf{n}_{r_{n,s,p}} \cdot \mathbf{H}_{e,\perp}^{tot}(\mathbf{r}_{n,s,p}) = 0,
 \end{aligned} \tag{3.7.5}$$

qui n'est autre que le système (3.7.3) doublé.

### 3.7.2 Système linéaire surdéterminé

#### Origine de la surdétermination

La finesse de la discrétisation des différents profils des  $N$  objets conditionne le nombre d'équations et le choix du nombre de pôles (tous multipôles compris), le nombre d'inconnues. Remarquons que le nombre d'équations est au plus *quatre* fois le nombre de points

de discrétisation (car il y a au maximum *quatre* équations de continuité par point), tandis que le nombre d'inconnues est au plus *deux* fois la somme des nombres de pôles de toutes les sources (car *deux* coefficients sont rattachés à chaque pôle, l'un pour  $\mathbf{E}_{\parallel}$  et l'autre pour  $\mathbf{H}_{\parallel}$ ).

Suivant la complexité de l'objet, et pourvu que le système reste surdéterminé, il est judicieux d'adapter le rapport nombre d'équations/nombre d'inconnues afin que la bonne qualité des résultats soit assurée. Il est donc rare que le problème présente autant d'équations que d'inconnues et un système deux fois surdéterminé mène généralement à une solution satisfaisante contrairement aux systèmes « carrés ».

### Forme et propriétés de la matrice système

Les conditions de continuité décrites dans la sous-section 3.7.1 sont écrites en mémoire sous la forme d'un tableau ou matrice système  $A$ . Au cours de l'exécution du programme, la matrice  $A$  est progressivement remplie par blocs et le résultat final est une alternance de blocs nuls et de blocs non-nuls. L'arrangement des lignes et des colonnes au sein même du tableau n'a pas d'importance; il suffirait de multiplier  $A$  à droite ou à gauche par une matrice de permutation (donc orthogonale) afin de retrouver le même problème mais réarrangé.

Contrairement à la méthode des éléments finis pour laquelle les matrices manipulées sont creuses (seuls les nœuds proches les uns des autres interagissent entre eux), la matrice système est dite *pleine* car tous les pôles ainsi que toutes les équations ont même importance. La présence de blocs nuls vient simplement du fait que certains groupes de sources n'interviennent pas dans telle ou telle partie d'un profil ou bien qu'il n'y a pas de contraintes à imposer à une composante de champ en particulier (*e. g.* les composantes tangentielles du champ magnétique sont laissées libres à la surface d'un corps *PEC*). Le cas échéant, colonnes et lignes intégralement nulles sont éliminées au cours du processus et les dimensions de la matrice  $A$  diminuent d'autant.

Chaque bloc est en fait représentatif

- d'une condition de continuité,
- d'un ensemble de points de discrétisation,
- d'un groupe de sources.

Lorsque ces trois données sont incompatibles (*e. g.* les sources externes à l'objet  $n$  n'entrent pas en ligne de compte lors de la génération du champ dans un objet autre que  $n$ ), alors le bloc est nul.

Si le nombre de points de discrétisation de la zone adressée donne le nombre de lignes du bloc en question, le nombre total de pôles du groupe de sources considéré en fixe le nombre de colonnes.

De manière générale, la matrice  $A$  ne présente pas de propriétés mathématiques remarquables. Cependant, pour le cas d'école de la diffraction par un objet de section circulaire (et sûrement pour d'autres cas sensiblement identiques), il se peut que  $A$  soit Toeplitz par blocs. La résolution de problèmes numériques à base de matrices Toeplitz ou Toeplitz par blocs peut tirer partie des performances d'algorithmes adaptés [N9, N10] afin de gagner en temps de calcul.

### Système linéaire

Écrivons le système à résoudre sous forme matricielle,

$$Ax = b, \quad (3.7.6)$$

et décrivons ses membres

- $A \in \mathbb{C}^{n \times p}$  est une matrice rectangulaire ( $p \leq n$ ) qui lie sources et points du profil par l'intermédiaire des conditions de continuité,
- $b \in \mathbb{C}^n$  est en première approximation la projection du champ incident sur le profil discrétisé,
- $x \in \mathbb{C}^p$  est un vecteur inconnu dont les coefficients sont les amplitudes complexes « rayonnées » par chaque pôle.

Un système surdéterminé n'a en général pas de solution (*a fortiori* l'inverse d'une matrice rectangulaire n'est pas définie). En effet, les points sur le contour de l'objet ainsi que les sources sont placées arbitrairement et il n'est pas garanti que la continuité du champ puisse être assurée *absolument* partout. De plus, le passage au numérique implique une perte de précision intrinsèque à la machine, laquelle a de fortes chances de rendre la résolution algébrique du problème impossible. Il serait donc exceptionnel que le système admette une solution rigoureuse au sens des mathématiques. Dès lors, l'opération de résolution d'un système surdéterminé consistera à trouver une solution approchée moyennant une erreur (tolérée) ou *résidu* que l'on cherchera à minimiser par la méthode des moindres carrés.

### 3.7.3 Méthode des moindres carrés

#### Principe

Le système (3.7.6) n'admettant généralement pas de solutions, introduisons le résidu  $r$  défini de la sorte :

$$\begin{aligned} r : \mathbb{C}^p &\rightarrow \mathbb{C}^n \\ x &\mapsto r(x) = b - Ax. \end{aligned} \quad (3.7.7)$$

Il nous faut évaluer la « force » de cette erreur, car c'est elle que nous chercherons à minimiser afin d'approcher au mieux la solution du problème. Celle-ci est fonction de la norme choisie,

$$\rho_p(x) = \|r(x)\|_p = \|Ax - b\|_p, \quad p \in \mathbb{N}^*. \quad (3.7.8)$$

Le système « avec résidu » admet une infinité de solutions car l'erreur est laissée libre mais la méthode des moindres carrés, en se basant sur la norme euclidienne, nous offre un critère pour en choisir une (alors appelée  $\tilde{x}$ ) parmi toutes :

$$\tilde{x} \in \mathbb{C}^p : \tilde{\rho}_2 = \|A\tilde{x} - b\|_2 = \inf\{\rho_2(x) : x \in \mathbb{C}^p\}. \quad (3.7.9)$$

Si  $\tilde{x}$  vérifie ce critère, c.-à-d. s'il minimise l'erreur, alors on l'appelle pseudo-solution de (3.7.6) et, dans ce cas,

$$\tilde{\rho}_2 = d(b, \text{Im}(A)). \quad (3.7.10)$$

Autrement dit, la méthode des moindres carrés consiste à minimiser la norme euclidienne de l'erreur de telle sorte que  $A\tilde{x}$  soit le projeté orthogonal de  $b$  sur  $\text{Im}(A)$ . Il s'ensuit que, pour  $x$  pris dans  $\mathbb{C}^p$ , chaque ligne de l'enchaînement suivant est équivalente à (3.7.10).

$$\langle Ax, A\tilde{x} - b \rangle = 0, \quad (3.7.11)$$

$$\langle x, A^\dagger(A\tilde{x} - b) \rangle = 0, \quad (3.7.12)$$

$$A^\dagger A\tilde{x} = A^\dagger b. \quad (3.7.13)$$

Si, par chance,  $b \in \text{Im}(A)$ , alors le système initial (3.7.6) admet des solutions. Au sens des moindres carrés, le critère (3.7.10) est donc nul.

La résolution du système **carré**

$$A^\dagger Ax = A^\dagger b \quad (3.7.14)$$

assure une erreur minimale au sens des moindres carrés.

Dans la plupart des cas, nous nous attacherons à résoudre le système (3.7.14) qui présente des propriétés mathématiques intéressantes. Notons-le

$$A'x = b', \quad (3.7.15)$$

où  $A' \in \mathbb{C}^{p \times p}$  et  $b' \in \mathbb{C}^p$ . Dans certains cas cependant, la résolution directe du système « rectangulaire » (3.7.6) n'est pas à exclure et différents algorithmes de résolution sont à considérer. Ce sera l'objet de la sous-section 3.7.4.

### Espace des solutions

Suivant le rang de la matrice  $A$ , deux cas sont à envisager.

1. Le rang de  $A$  est égal à  $p$  (on parle de *full-rank problem*).

Dans cette situation, l'espace qui minimise la distance entre l'image de  $A$  et  $b$  n'admet qu'un seul élément,

$$\tilde{\mathcal{X}} = \{\tilde{x}\} \text{ avec } \tilde{x} = A'^{-1}b', \quad (3.7.16)$$

car  $A'$  est inversible.

2. Le rang de  $A$  est strictement inférieur à  $p$  (on parle de *rank-deficient problem*).

L'espace des solutions

$$\tilde{\mathcal{X}} = \{x \in \mathbb{C}^p : \rho_2(x) = \tilde{\rho}_2\} \quad (3.7.17)$$

admet une infinité d'éléments et le seul critère des moindres carrés n'est plus suffisant. Généralement, on choisit dans  $\tilde{\mathcal{X}}$  l'élément dont la norme est la plus petite,

$$\tilde{x} \in \tilde{\mathcal{X}} : \|\tilde{x}\|_p = \inf\{\|x\|_p : x \in \tilde{\mathcal{X}}\}, p \in \mathbb{N}^*. \quad (3.7.18)$$

Le choix de la norme est fonction de l'algorithme de résolution ; cependant, il s'agit généralement de la norme euclidienne.

### 3.7.4 Algorithmes de résolution

De nombreuses routines de la librairie LAPACK [N4] sont à même de résoudre un système au sens des moindres carrés. Toutes factorisent la matrice système en question ( $A$  aussi bien que  $A'$ ) de telle sorte qu'au moins un des facteurs soit une matrice triangulaire<sup>6</sup>. La résolution de ce nouveau système est immédiate à l'aide d'un algorithme d'élimination de type Gauss-Jordan.

---

<sup>6</sup>C'est l'opération la plus coûteuse en termes de temps de calcul.

### Travail sur la matrice rectangulaire $A$

En ce qui concerne les matrices rectangulaires, il existe plusieurs méthodes de factorisations. Parmi les plus utilisées, citons les factorisations QR, LU et SVD (*Singular Value Decomposition*). Souvent, ces classes de factorisations admettent plusieurs algorithmes issus de différents contributeurs et se dérivent en autant de routines dans les bibliothèques de calcul numérique. Nous nous contenterons d'exposer brièvement le principe des factorisations QR et SVD.

**Factorisation QR** Il existe une matrice unitaire  $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$  telle que

$$R = Q^\dagger A, \quad R \in \mathbb{C}^{n \times p}, \quad (3.7.19)$$

soit triangulaire supérieure. La résolution du système (3.7.6) se résume donc au calcul des matrices  $Q$  et  $R$  et à la résolution du système trivial

$$Rx = Q^\dagger b, \quad (3.7.20)$$

$$\begin{bmatrix} T \\ 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}, \quad (3.7.21)$$

où  $c \in \mathbb{C}^p$ ,  $d \in \mathbb{C}^{n-p}$  et où  $T \in \mathbb{C}^{p \times p}$  est une matrice triangulaire supérieure.

L'algorithme de Householder [N1] permet de résoudre un problème au sens des moindres carrés en  $2np^2 - 2p^3/3$  flops.

Si  $\tilde{x}$  est la solution de ce système au sens des moindres carrés, sa « qualité » s'évalue par

$$\tilde{\rho}_2 = \sqrt{\|T\tilde{x} - c\|_2^2 + \|d\|_2^2}; \quad (3.7.22)$$

et si le problème est de type « *full-rank* », alors,

$$\text{rg}(A) = p \Leftrightarrow \text{rg}(T) = p; \quad (3.7.23)$$

soit

$$\tilde{\rho}_2 = \|d\|_2. \quad (3.7.24)$$

La sensibilité  $\tilde{s}$  de la solution est, à une constante machine près, fonction du conditionnement de la matrice système [N1],

$$\tilde{s} \propto \kappa_2(A) + \tilde{\rho}_2[\kappa_2(A)]^2. \quad (3.7.25)$$

La stabilité de la factorisation QR tient dans le facteur  $\tilde{\rho}_2$  qui atténue la sensibilité de la solution.

**Décomposition SVD** Il existe un couple de matrices unitaires  $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$  et  $V \in \mathbb{C}^{p \times p}$  tel que

$$\Sigma = U^\dagger AV, \quad \Sigma \in \mathbb{R}^{n \times p}, \quad (3.7.26)$$

soit une matrice diagonale<sup>7</sup> contenant les  $p$  valeurs singulières de  $A$ .

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p), \quad \sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_p \geq 0. \quad (3.7.27)$$

---

<sup>7</sup>Au sens des matrices rectangulaires.

Le système initial se transforme en

$$\Sigma V^\dagger x = U^\dagger b, \quad (3.7.28)$$

$$\begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix} x' = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}, \quad (3.7.29)$$

où  $c \in \mathbb{C}^p$ ,  $d \in \mathbb{C}^{n-p}$ ; où  $D \in \mathbb{C}^{p \times p}$  est une matrice diagonale et où  $x' = V^\dagger x$ .

De même que pour la factorisation QR, la qualité de la solution  $\tilde{x} = V\tilde{x}'$  se mesure ainsi :

$$\tilde{\rho}_2 = \sqrt{\|D\tilde{x}' - c\|_2^2 + \|d\|_2^2}; \quad (3.7.30)$$

et si le problème est de type « *full-rank* », alors,

$$\text{rg}(A) = p \Leftrightarrow \text{rg}(D) = p; \quad (3.7.31)$$

soit

$$\tilde{\rho}_2 = \|d\|_2. \quad (3.7.32)$$

La sensibilité de la solution issue d'une décomposition SVD est de la même nature que celle issue d'une factorisation QR, c.-à-d. proportionnelle au conditionnement de A.

Dans notre situation, nous ne pouvons pas nous contenter du seul calcul des valeurs singulières; la détermination du facteur  $V$  est nécessaire<sup>8</sup>. Le coût total de la décomposition SVD est de  $2np^2 + 11p^3$  flops.

### Travail sur la matrice hermitienne carrée $A'$

Si les méthodes de factorisation SVD et QR peuvent s'attaquer à la résolution de systèmes linéaires de taille quelconque, nous devons tirer parti des propriétés de  $A'$  pour choisir la méthode la plus adaptée. En effet,  $A'$  est **hermitienne** (définie positive ou semi-définie positive suivant le rang de A)

$$A'^\dagger = A' \quad (3.7.33)$$

et, parmi tous les algorithmes disponibles, le passage par une factorisation de Cholesky est optimal.

**Factorisation de Cholesky** En prenant pour hypothèse que  $A'$  est une matrice hermitienne semi-définie positive, il existe au moins une matrice triangulaire  $T$  (inférieure ou supérieure) telle que

$$A' = TT^\dagger. \quad (3.7.34)$$

Si  $A'$  est définie positive, alors cette décomposition est unique et tous les éléments diagonaux de  $T$  sont strictement positifs.

La résolution du système (3.7.15) consiste alors en la résolution successive de deux systèmes triangulaires.

$$TT^\dagger x = b' \Leftrightarrow \begin{cases} Ty = b' \\ T^\dagger x = y \end{cases}. \quad (3.7.35)$$

---

<sup>8</sup>Contrairement à  $U^\dagger$  qui n'a pas à être exprimée de manière explicite mais qui doit plutôt être appliquée « à la volée » à  $b$ .

L'algorithme de Cholesky présente une complexité totale de  $np^2 + p^3/3$  flops (en gardant à l'esprit que  $n$  est supérieur à  $p$ ).

La sensibilité  $\tilde{s}$  de la solution est, à une constante machine près, de l'ordre du carré du conditionnement de la matrice système,

$$\tilde{s} \propto [\kappa_2(A')]^2. \quad (3.7.36)$$

### Cas du problème de type « *rank-deficient* »

Si jamais le rang de la matrice  $A$  (appelé  $q$ ) est inférieur à son nombre de colonnes ( $p$ ), plusieurs méthodes sont envisageables. Parmi elles, nous choisissons de travailler sur la matrice rectangulaire au moyen de la décomposition SVD qui permet d'illustrer simplement le problème. Dans ce cas, certaines valeurs singulières de  $A$  sont nulles. Ainsi,

$$\sigma_{q+1} = \sigma_{q+2} = \dots = \sigma_p = 0. \quad (3.7.37)$$

La solution  $\tilde{x}$  s'exprime simplement à partir de

$$\forall i \in [1, p], \tilde{x}'_i = \begin{cases} \frac{c_i}{\sigma_i}, & i \in [1, q] \\ 0, & i \in [q+1, p] \end{cases}. \quad (3.7.38)$$

## 3.8 Validation physique

### 3.8.1 Section efficace de diffraction

#### Définition

La section efficace différentielle (SED) traduit la répartition angulaire (à l'infini) de l'intensité dans le plan transverse  $xy$ . Elle se définit par

$$\sigma(\theta) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left( 2\pi r \frac{\|E_e^{dif}(r, \theta)\|^2}{\|E^{inc}\|^2} \right). \quad (3.8.1)$$

Son expression littérale, se déduit naturellement de celle du champ diffracté, (3.5.16),

$$U_{e,z}^{dif}(r, \theta) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^{M_n} \sum_{p=-P_m}^{P_m} u_{i,n,m,p} H_p^{(1)}(\tilde{k}_e \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_{i,n,m}\|) e^{ip(\theta - \theta_{i,n,m})}. \quad (3.8.2)$$

Le rayonnement de chaque pôle a pour origine la source à laquelle il « appartient ». Pour que le calcul du rayonnement lointain soit cohérent, il faut que chaque contribution ait même origine. Pour cela, appliquons le théorème de Graf [N11] sur chaque fonction de base.

$$H_p^{(1)}(\tilde{k}_e r_{i,n,m}) e^{ip\vartheta_{i,n,m}} = \sum_{q=-\infty}^{\infty} e^{i(p-q)\theta_{i,n,m}} J_{q-p}(\tilde{k}_e s_{i,n,m}) H_q^{(1)}(\tilde{k}_e r) e^{iq\theta}, \quad (3.8.3)$$

avec  $r_{i,n,m} = \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_{i,n,m}\|$  et  $\vartheta_{i,n,m} = \text{angle}(\mathbf{e}_x, \mathbf{r} - \mathbf{s}_{i,n,m}) = \theta - \theta_{i,n,m}$ .

Le champ diffracté se réexprime comme celui d'une source unique placée à l'origine mais dont le développement en harmoniques cylindriques est quelque peu complexe.

$$U_{e,z}^{dif}(r, \theta) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} u_{i,q} H_q^{(1)}(\tilde{k}_e r) e^{iq\theta}, \quad (3.8.4)$$

où

$$u_{i,q} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^{M_n} \sum_{p=-P_m}^{P_m} u_{i,n,m,p} e^{i(p-q)\theta_{i,n,m}} J_{q-p}(\tilde{k}_e s_{i,n,m}). \quad (3.8.5)$$

Le comportement asymptotique ( $r \rightarrow \infty$ ) des fonctions de Hankel est connu [N11],

$$H_q^{(1)}(\tilde{k}_e r) = \sqrt{\frac{2}{\pi \tilde{k}_e r}} e^{i(\tilde{k}_e r - q\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} + O\left(r^{-\frac{3}{2}}\right). \quad (3.8.6)$$

La forme asymptotique du champ diffracté s'ensuit :

$$U_{e,z}^{dif}(r, \theta) = \underbrace{\frac{e^{i\tilde{k}_e r}}{\sqrt{r}}}_{f(r)} \underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi \tilde{k}_e}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \sum_{q=-\infty}^{\infty} u_{i,q} e^{iq(\theta - \frac{\pi}{2})}}_{g_U(\theta)} + O\left(r^{-\frac{3}{2}}\right). \quad (3.8.7)$$

Les fonctions  $g_E$  et  $g_H$  représentent les dépendances angulaires des champs électrique et magnétique. Ainsi,

$$g_E(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi \tilde{k}_e}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \sum_{q=-\infty}^{\infty} e_{i,q} e^{iq(\theta - \frac{\pi}{2})}, \quad (3.8.8)$$

$$g_H(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi \tilde{k}_e}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \sum_{q=-\infty}^{\infty} h_{i,q} e^{iq(\theta - \frac{\pi}{2})}. \quad (3.8.9)$$

**Remarques concernant les dépendances angulaires et radiales** Deux propriétés d'importance au sujet des fonctions  $g_U$  définies ci-dessus.

1.  $g_E$  et  $g_H$  sont, de fait,  $2\pi$ -périodiques. Leur expression n'est autre qu'une décomposition en série de Fourier.
2. Le champ diffracté vérifiant la condition de rayonnement de Sommerfeld,  $g_E$  et  $g_H$  sont d'énergie finie et donc de carré sommable.

$$g_U \in L^2([0, 2\pi]), \quad U = E, H. \quad (3.8.10)$$

3. Contrairement aux dépendances angulaires  $g_U$ , la dépendance radiale  $f$  est identique pour  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$ .

A présent, nous allons utiliser les équations du système (3.3.23) afin d'expliciter le comportement asymptotique des composantes transverses en fonction de celui ( $g_U$ ) des composantes longitudinales. Le gradient transverse, exprimé dans le système  $(r, \theta)$ , vaut

$$\nabla_{\perp} U_{e,z}^{dif} = \partial_r U_{e,z}^{dif} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \partial_{\theta} U_{e,z}^{dif} \mathbf{e}_{\theta}. \quad (3.8.11)$$

Le calcul se ramène à l'expression des dérivées partielles du champ suivant  $r$  et  $\theta$ . Pour la première, exprimons dans le plan la condition de rayonnement de Sommerfeld.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \partial_r U_{e,z}^{dif} - i\tilde{k}_e U_{e,z}^{dif}(r, \theta) \right) = 0. \quad (3.8.12)$$

Celle-ci est équivalente à

$$\partial_r U_{e,z}^{dif} = i\tilde{k}_e f(r) g_U(\theta) + o\left(r^{-\frac{1}{2}}\right). \quad (3.8.13)$$



Dérivons (3.8.7) suivant  $\theta$ .

$$\partial_\theta U_{e,z}^{dif} = f(r) \partial_\theta g_U + O\left(r^{-\frac{3}{2}}\right). \quad (3.8.14)$$

Prise à la limite, la dérivée partielle angulaire est négligeable devant la dérivée partielle radiale. L'expression asymptotique du gradient transverse s'en trouve simplifiée :

$$\nabla_\perp U_{e,z}^{dif} \sim i\tilde{k}_e f(r) g_U(\theta) \mathbf{e}_r. \quad (3.8.15)$$

L'expression asymptotique du champ électrique transverse vient

$$\mathbf{E}_{e,\perp}^{dif} \sim \frac{i}{\tilde{k}_e^2} (ik_z \tilde{k}_e f(r) g_E(\theta) \mathbf{e}_r - i\omega\mu_e \tilde{k}_e f(r) g_H(\theta) \mathbf{e}_\theta). \quad (3.8.16)$$

Et, finalement, celle du champ total :

$$\mathbf{E}_e^{dif} \sim f(r) \left[ -\frac{k_z}{\tilde{k}_e} g_E(\theta) \mathbf{e}_r + \frac{\omega\mu_e}{\tilde{k}_e} g_H(\theta) \mathbf{e}_\theta + g_E(\theta) \mathbf{e}_z \right]. \quad (3.8.17)$$

Après quelques lignes de calcul, l'expression de la SED est

$$\sigma(\theta) = 2\pi \frac{k_e^2}{\tilde{k}_e^2} \left( |g_E(\theta)|^2 + \eta_e^2 |g_H(\theta)|^2 \right). \quad (3.8.18)$$

### 3.8.2 Théorème optique

Le théorème optique n'est autre que le théorème de Poynting portant sur la conservation de l'énergie électromagnétique : la quantité d'énergie injectée dans un système sans pertes est égale à celle qui est diffractée. Considérons un cylindre de section circulaire englobant les objets diffractants dans leur totalité ; les objets sont sans pertes et la surface (fermée) du cylindre est  $S$ . Ainsi,

$$\int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* + \mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{s} = 0. \quad (3.8.19)$$

La démonstration qui mène au théorème optique est relativement fastidieuse ; le détail des calculs se trouve dans le manuscrit de thèse de F. Zolla [E15]. Finalement, le théorème optique en configuration conique s'énonce

$$\operatorname{Re} \left( \cos \delta^{inc} G_E(\theta^{inc} + \pi) - \sin \delta^{inc} G_H(\theta^{inc} + \pi) \right) = \frac{k_e}{2\pi \tilde{k}_e} \int_0^{2\pi} \left( |G_E(\theta)|^2 + |G_H(\theta)|^2 \right) d\theta, \quad (3.8.20)$$

où

$$G_E(\theta) = \sqrt{\frac{\pi \tilde{k}_e}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} g_E(\theta), \quad (3.8.21)$$

$$G_H(\theta) = \eta_e \sqrt{\frac{\pi \tilde{k}_e}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} g_H(\theta). \quad (3.8.22)$$

L'intégrale dans l'expression du théorème optique (3.8.20), soit l'énergie diffractée, doit pouvoir s'exprimer uniquement en fonction du module pris au carré des coefficients  $u_{i,q}$ ,

soit l'énergie portée par chaque ordre du développement de Fourier-Bessel. Substituons les expressions de  $g_E$  et  $g_H$  à celles de  $G_E$  et  $G_H$  ; il vient :

$$\int_0^{2\pi} (|G_E(\theta)|^2 + |G_H(\theta)|^2) d\theta = \int_0^{2\pi} \left( \left| \sum_{q=-\infty}^{\infty} e_{i,q} e^{iq\theta} \right|^2 + |\eta_e|^2 \left| \sum_{q=-\infty}^{\infty} h_{i,q} e^{iq\theta} \right|^2 \right) d\theta. \quad (3.8.23)$$

L'ensemble des exponentielles  $\{\theta \mapsto e^{iq\theta}, q \in \mathbb{Z}\}$  forme une base de l'espace  $L^2([0, 2\pi])$  et l'égalité de Parseval donne

$$\int_0^{2\pi} (|G_E(\theta)|^2 + |G_H(\theta)|^2) d\theta = 2\pi \left( \sum_{q=-\infty}^{\infty} |e_{i,q}|^2 + |\eta_e|^2 \sum_{q=-\infty}^{\infty} |h_{i,q}|^2 \right). \quad (3.8.24)$$

L'expression finale du théorème optique est

$$\operatorname{Re} \left( \cos \delta^{inc} G_E(\theta^{inc} + \pi) - \sin \delta^{inc} G_H(\theta^{inc} + \pi) \right) = \frac{k_e}{\bar{k}_e} \sum_{q=-\infty}^{\infty} (|e_{i,q}|^2 + |\eta_e|^2 |h_{i,q}|^2). \quad (3.8.25)$$

## 3.9 Illustration et validation de la méthode des sources fictives

### 3.9.1 Fibre optique microstructurée

Ce premier exemple d'application de la méthode des sources fictives est issu d'une étude portant sur l'excitation de modes pouvant se propager dans une fibre optique microstructurée [E16, E17].

La recherche de modes dans le plan complexe est une fonctionnalité qui n'est pas programmée dans le code basé sur la méthode des sources fictives car l'étude de guides purement diélectriques sort du cadre de cette thèse. Nous nous intéressons donc à un mode dont l'indice effectif est connu [E17] et dont l'excitation se fera au moyen d'une onde plane en configuration conique.

#### Champ incident et structure

L'incidence est « totalement conique » et le champ incident est polarisé TE. Ses grandeurs caractéristiques sont les suivantes :

$$\lambda_0^{inc} = 1.56, \theta^{inc} = 79.73^\circ, \phi^{inc} = 90^\circ, \delta^{inc} = 0^\circ. \quad (3.9.1)$$

La structure éclairée par cette onde plane est un ensemble de six tiges de section circulaire dont les centres forment un hexagone régulier centré sur l'origine. En unités normalisées, la distance de l'origine au centre de l'une des tiges vaut 2.3 et le diamètre de l'une d'entre elles vaut 1.

Ces six tiges sont en fait autant de cylindres percés dans une matrice de silice. Les milieux ne sont pas magnétiques. Ainsi,

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_6 = 1 \text{ et } \varepsilon_e = 1.44390356^2, \quad (3.9.2)$$

$$\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_6 = \mu_e = 1. \quad (3.9.3)$$

Chaque cercle est modélisé par une série de 80 points équirépartis et on affecte à chaque objet deux groupes de 40 monopôles. Les sources internes, aussi bien que les sources

externes, sont placées à l'aide de la méthode des triangles (se référer à la section C.2 en annexe) et sont donc équiréparties également.

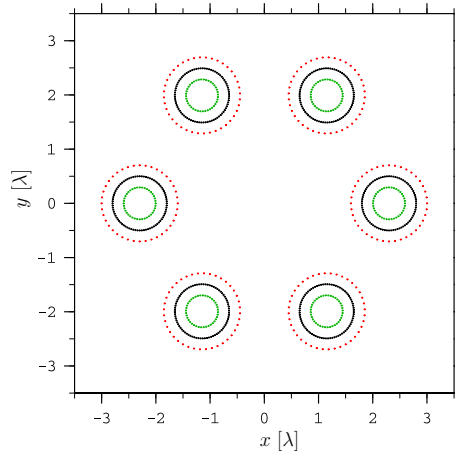


Figure 3.6 – L’interface entre les six tiges vides et le milieu ambiant est décrite par six séries de 80 points (en noir). Le champ diffracté dans une tige est généré par 40 monopôles (en rouge) tandis que celui qui est diffracté dans le milieu ambiant l’est par 240 monopôles (en vert).

### Performances numériques

La structure est décrite par  $6 \times 80 = 480$  points, soit 1920 équations et le nombre d’inconnues est le double du nombre de pôles (il faut « rayonner » aussi bien  $\mathbf{E}$  que  $\mathbf{H}$ ) soit  $6 \times 80 \times 2 = 960$ . Le système est donc exactement deux-fois surdéterminé et la matrice correspondante appartient à  $\mathbb{C}^{1920 \times 960}$ . Le temps de génération de cette matrice est approximativement de 3.7 secondes et la figure 3.7 en page 63 donne une idée de sa structure.

Différentes méthodes de résolution ont été testées et le tableau 3.1 résume les performances de chacune. On se rend compte que, dans la mesure du possible, le choix d’un algorithme adapté peut faire gagner plus d’un facteur dix<sup>9</sup> en temps de résolution<sup>10</sup>.

Méthode de résolution	Erreur numérique ( $\tilde{\rho}_2$ )	Temps de résolution [s]	Total [s]
SVD	$8.8 \times 10^{-5}$	243.6	247.3
QR	$8.8 \times 10^{-5}$	85.7	89.4
Cholesky	$4.5 \times 10^{-6}$	22.5	26.2

Tableau 3.1 – Temps et précisions des calculs dans le cas de la fibre optique microstructurée en utilisant différentes méthodes de résolution sur un processeur Intel Core 2 Duo T7300 cadencé à 2 GHz.

### Cartes de champs

Dans l’étude des fibres optiques, l’étude des composantes longitudinales du champ électromagnétique prime sur celle des composantes transverses car elles contiennent les

<sup>9</sup>La méthode de Cholesky face à la SVD.

<sup>10</sup>Le temps total correspond au temps de génération de la matrice système auquel on ajoute le temps de résolution

informations sur la symétrie du mode excité. Dans cet exemple, il s'agit de l'excitation partielle du mode  $LP_{01}$  pour lequel champs électrique et magnétique sont polarisés linéairement.

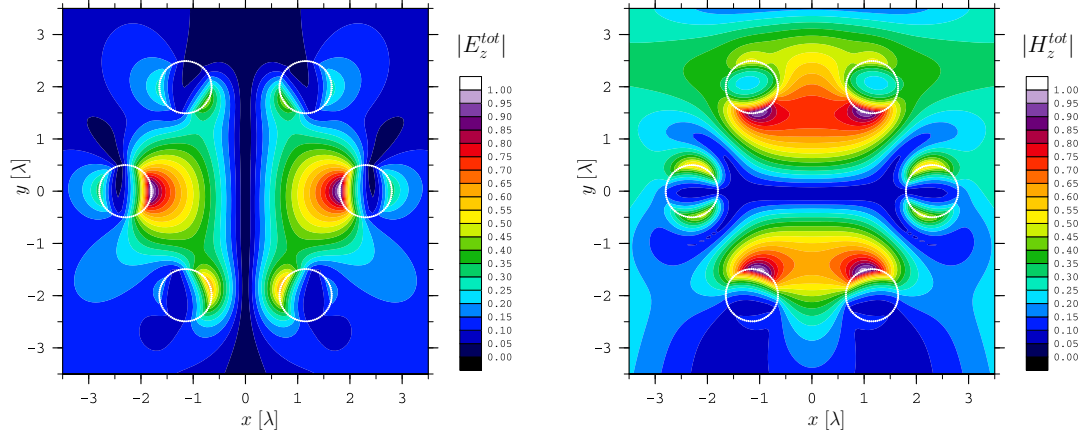


Figure 3.8 – Composantes longitudinales (ramenées à l'unité) du champ électrique total (à gauche) et du champ magnétique total (à droite).

Le vecteur de Poynting nous donne une idée sur la répartition ainsi que sur la direction de propagation de l'énergie dans la structure. Dans ce cas, la partie transverse du vecteur de Poynting est faible devant la partie longitudinale et la majeure partie de l'énergie est concentrée dans le cœur de la fibre. Cela indique un fort guidage en  $z$ .

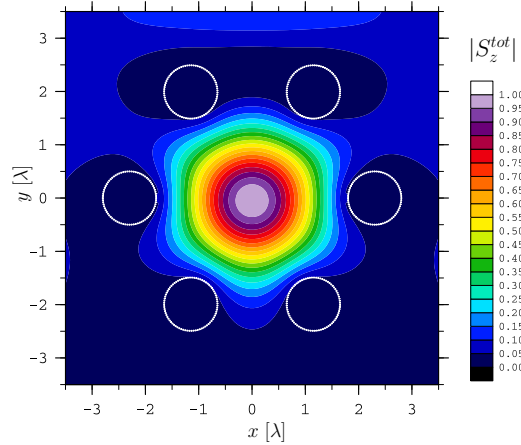


Figure 3.9 – Composante longitudinale (ramenée à l'unité) du vecteur de Poynting dans le cas de l'excitation partielle du mode  $LP_{01}$  de la fibre.

Il est à noter que la partie longitudinale du vecteur de Poynting renseigne sur la forme du champ transverse.

### 3.9.2 Miroir hémicylindrique

D'un point de vue numérique, la saisie des points sur le profil d'un objet se fait par sections. Cela rend possible la modélisation de miroirs si l'une d'entre elles est infiniment conductrice. Dans cette sous-section, l'objet étudié est un cylindre de section circulaire dont le pourtour est

- métallique pour  $y > 0$ ,
- diélectrique pour  $y < 0$ .

Les caractéristiques de la structure se résument à

$$\varepsilon_{int} = 4, \varepsilon_{ext} = 1, r = 3; \quad (3.9.4)$$

et celles du champ incident à

$$\lambda_0^{inc} = 0.7, \theta^{inc} = 0^\circ, \phi^{inc} = 0^\circ, \delta^{inc} = 0^\circ. \quad (3.9.5)$$

La figure ci-dessous représente le champ électrique total au voisinage du miroir.

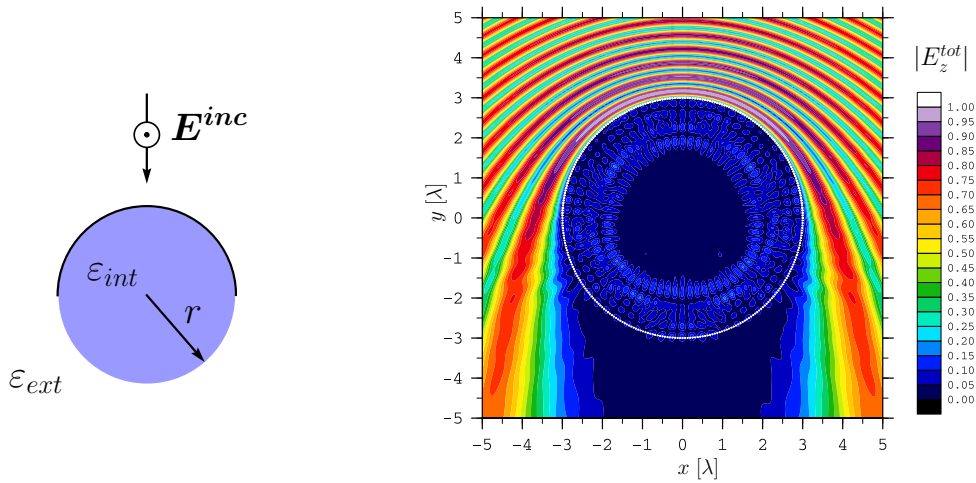


Figure 3.10 – *Champ électrique total réfléchi par le miroir hémicylindrique.*

L'objet discrétisé est un ensemble de 300 points et les sources sont placées à l'aide de la méthode des triangles. Celles-ci sont au nombre de 150 à l'intérieur et autant à l'extérieur. La conservation de l'énergie dépasse 99 % et la SED dont l'expression générale est développée dans la section 3.8.1 est représentée au niveau de la figure ci-dessous.

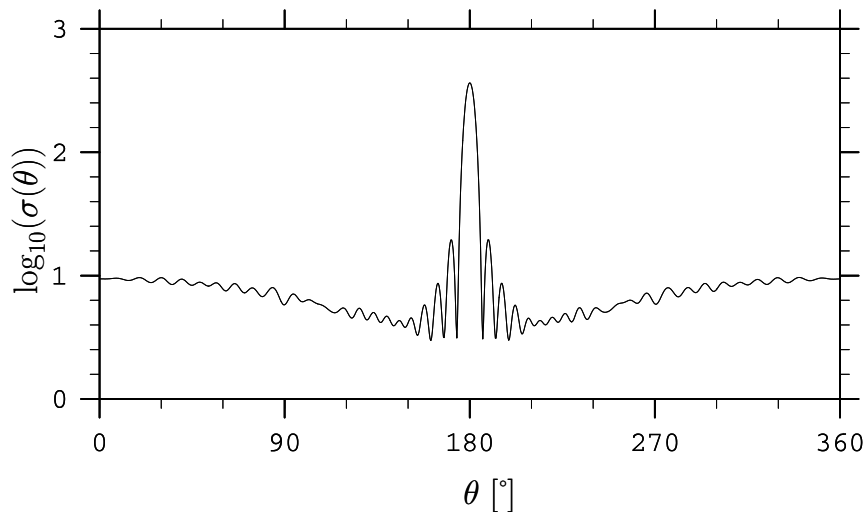


Figure 3.11 – *SED pour le miroir hémicylindrique.*

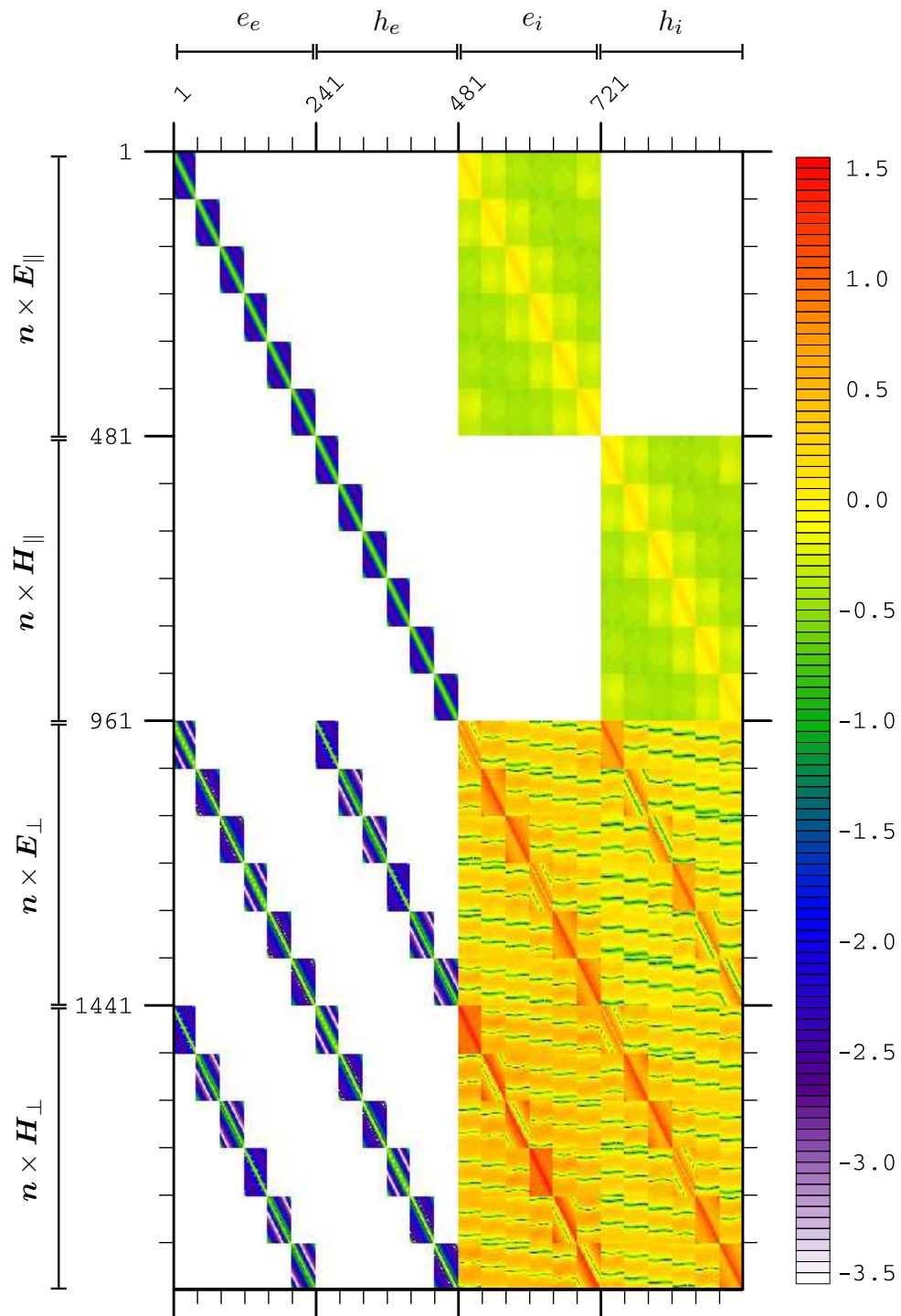


Figure 3.7 – Module de la matrice système (échelle logarithmique) générée pour traiter le cas de la fibre optique microstructurée. Les groupes de colonnes concernent certains groupes de pôles tandis que les groupes de lignes concernent différentes classes de conditions de continuité sur l'intégralité des six tiges.



## Chapitre 4

# Méthode des sources fictives *étendue*

### Sommaire

<b>4.1 Méthode des sources fictives et réseaux de diffraction</b> . . . . .	<b>65</b>
<b>4.2 Méthode des sources fictives et guides d'ondes</b> . . . . .	<b>76</b>

## 4.1 Méthode des sources fictives et réseaux de diffraction

### 4.1.1 État de l'art et objectifs

La principale force de la méthode des sources fictives tient dans le fait qu'elle n'est pas formatée pour un certain type d'objets. En effet, nous l'avons montré dans la section qui précède, cette méthode peut traiter une grande variété de géométries pourvu que le contour de chaque objet soit discrétisé suffisamment finement. Remarquons que, jusqu'à présent, cette technique n'a été utilisée que pour des objets isolés.

Il y a plus d'une dizaine d'années déjà [N12, N13], la méthode des sources fictives fut adaptée aux structures périodiques dont : les réseaux de diffraction grâce à l'emploi de la *fonction de Green périodique* ou encore les structures tridimensionnelles bipériodiques [N2].

En ce qui concerne les réseaux, la mise en œuvre de techniques destinées au calcul efficace de la fonction de Green périodique est délicate [N13, N14]. Si la nature même des calculs méritait d'être repensée, le cas de l'incidence conique se devait aussi d'être considéré car, dans le cadre de cette thèse, l'étude de surfaces sélectives en fréquence et en incidence, imposait qu'il le soit.

Nous présentons dans cette section une façon élégante de tirer partie des qualités de la méthode des sources fictives afin de l'adapter aux structures périodiques dans l'espace et ce sans restriction<sup>1</sup> sur les conditions d'incidence (angles et polarisation).

Grâce à cette nouvelle approche de la méthode des sources fictives, nous sommes à même d'extraire avec précision les propriétés en réflexion, en transmission et, le cas échéant, en absorption d'un large éventail de systèmes périodiques pour une longueur d'onde et une incidence données. Les structures à même d'être traitées vont de la simple interface plane entre deux milieux homogènes au cristal photonique bidimensionnel d'épaisseur finie.

<sup>1</sup>Hormis le cas particulier d'une incidence rigoureusement parallèle à l'axe d'invariance de la structure, soit  $\theta^{inc} = \pm\pi/2$  et  $\phi^{inc} = \pm\pi/2$ , pour laquelle les fonctions de base employées (certaines fonctions de Hankel) sont singulières.



### 4.1.2 Configurations

Notre étude porte sur les réseaux de diffraction au sens historique du terme c.-à-d. la répétition à l'infini et suivant *une direction* d'un *motif bidimensionnel*. Soit un réseau quelconque dont la période est  $\mathbf{p} = p\mathbf{e}_x$ ; l'espace se subdivise naturellement en trois domaines :

1. un domaine borné en hauteur (suivant  $y$  dans notre cas) dans lequel la distribution d'indice optique est une fonction périodique suivant une direction ( $x$  dans notre cas), le réseau lui-même ;

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times [y_{min}, y_{max}], \nu(x + p, y) = \nu(x, y), \quad (4.1.1)$$

2. un domaine semi-infini homogène « au-dessus », le superstrat (repéré par *sup*) ;

$$\forall \mathbf{r} \in \Omega_{sup}, \nu(\mathbf{r}) = \nu_{sup}, \quad (4.1.2)$$

3. un domaine semi-infini homogène « au-dessous », le substrat (repéré par *sub*) ;

$$\forall \mathbf{r} \in \Omega_{sub}, \nu(\mathbf{r}) = \nu_{sub}, \quad (4.1.3)$$

où  $\nu = \varepsilon, \mu$ .

Ce réseau est éclairé par un champ incident dont le support est le superstrat. C'est une onde plane dont les propriétés (vecteur d'onde, polarisation et amplitude) sont analogues à celles énoncées dans la sous-section 3.5.2 dans le cas d'objets placés seuls dans l'espace.

$$\forall \mathbf{r} \in \Omega_{sup}, \mathbf{U}^{inc}(\mathbf{r}) = \mathbf{U}_0^{inc} e^{i\mathbf{k}^{inc} \cdot \mathbf{r}}, \quad (4.1.4)$$

où  $k^{inc} = k_{sup} = \sqrt{\varepsilon_{sup}\mu_{sup}}k_0$ .

### 4.1.3 Approche propre à la méthode des sources fictives *étendue*

#### Cellule élémentaire

De fait, le champ dans le réseau n'est pas totalement inconnu et cette information doit être tournée à notre avantage. En effet, il hérite du caractère périodique de la structure diffractante et cette *propriété* de périodicité devient alors une *condition* à imposer dans la formulation numérique future du problème. Aussi, plutôt que d'écrire analytiquement une expression de ce champ *partout* au sein du réseau, c'est le cas lors du calcul de la fonction de Green périodique, il nous suffit de le connaître pour une période puis de le répliquer à l'infini tout en lui appliquant un déphasage régulier. Cette manière de procéder permet de le reconstruire dans tout l'espace.

À cette étape de la modélisation, l'objet de travail est une période, sous-entendu une zone dont la largeur est finie ( $p$ ) mais dont la hauteur est infinie. Il est impossible de le tronquer en hauteur car la totalité du champ doit être prise en compte, aussi bien les composantes évanescences que les composantes qui se propagent à l'infini. Cet objet n'est pas directement utilisable par la méthode des sources fictives car il faudrait une infinité de points pour décrire ses deux parois.

Pour palier à cela, nous pouvons tirer partie de la forme du champ dans les milieux environnant le réseau. Celui-ci peut être décrit par deux **développements de Rayleigh**, l'un dans le superstrat, l'autre dans le substrat [N15]. Finalement, cela nous permet de diviser en trois la zone d'étude :

1. le superstrat,

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times ]y_{max}, \infty[ \Leftrightarrow (x, y) \in \Omega_{sup} ; \quad (4.1.5)$$

2. le substrat,

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times ]-\infty, y_{min}[ \Leftrightarrow (x, y) \in \Omega_{sub} ; \quad (4.1.6)$$

3. une cellule élémentaire,

$$x_0 \in \mathbb{R}, (x, y) \in ]x_0, x_0 + p[ \times ]y_{min}, y_{max}[ \Leftrightarrow (x, y) \in \Omega_c. \quad (4.1.7)$$

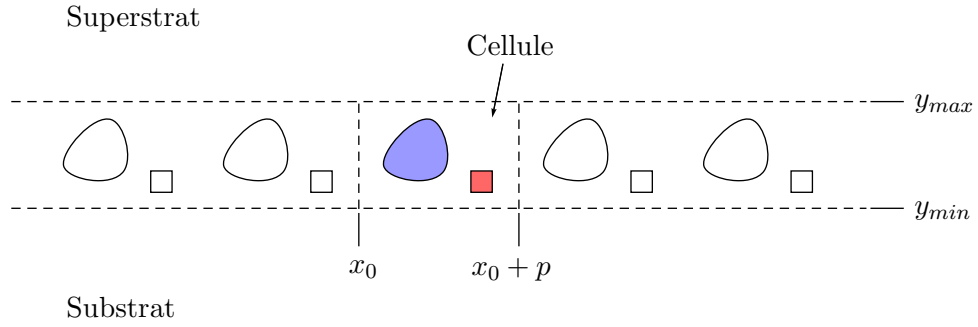


Figure 4.1 – Définition de la cellule élémentaire.

La nouveauté de la méthode consiste donc à ne travailler que sur une période grâce à l'introduction de la cellule élémentaire. À l'échelon numérique, cette dernière sera traitée comme un objet fictif regroupant l'intégralité des propriétés du réseau.

### Avantages et limitations

Il serait envisageable de mener le même type d'étude dans le cadre de configurations purement tridimensionnelles. En effet, une maille parallélépipédique aux propriétés adéquates permettrait de traiter des cas plus complexes où la périodicité (suivant une direction ou plus) porterait sur un motif tridimensionnel. Il va sans dire qu'en gagnant une dimension et bien que les calculs théoriques ne soient pas tellement plus complexes, l'élaboration d'un code numérique à même de traiter les trois dimensions est incomparablement plus lourde (cela impliquerait entre autres le passage d'un maillage de profil à un maillage de surface). De plus, cette thèse n'a pas vocation à résoudre cette catégorie de problèmes.

À première vue, la principale limitation de la méthode est que nous sommes contraints à simuler des **structures infinies** suivant la ou les directions de périodicité. À défaut d'être plus efficace que la méthode modale dans des configurations canoniques telles que des réseaux de tiges de section rectangulaire, la méthode des sources fictives nous permet de modéliser tous types de motifs périodiques. *A contrario*, et sans pour autant être aussi souple que la méthode des éléments finis pour laquelle des objets aux formes exotiques posent peu de problèmes, il est très facile d'adapter la méthode des sources fictives aux systèmes périodiques.

#### 4.1.4 Expressions des champs dans et hors du réseau

##### Expression du champ électromagnétique à l'extérieur du réseau

Soumis à un certain champ incident, un réseau distribue l'énergie lumineuse incidente dans certaines directions privilégiées (et discrètes) ou *ordres de diffraction*. À chaque ordre

de diffraction (indexé par un entier,  $n$ ), est associé un vecteur d'onde  $\mathbf{k}_n$  qui peut être réel, dans le cas d'un ordre propagatif, ou bien complexe, dans le cas d'un ordre évanescent. Si  $p$  est la période du réseau, alors

$$k_{\alpha,n,x} = k_{n,x} = k_x^{inc} + \frac{2n\pi}{p}, \quad (4.1.8)$$

$$k_{\alpha,n,y}^2 = \tilde{k}_\alpha^2 - k_{\alpha,n,x}^2, \quad (4.1.9)$$

$$k_{\alpha,n,z} = k_{n,z} = k_z^{inc}, \quad (4.1.10)$$

avec  $\alpha = sup, sub$ . Prenons aussi pour convention

$$\text{Re}(\mathbf{k}_{\alpha,n} \cdot \mathbf{e}_y) > 0. \quad (4.1.11)$$

À l'extérieur du réseau, le champ s'exprime sous la forme d'une somme d'ondes planes. Intéressons-nous à ses composantes longitudinales.

$$\forall (x, y) \in \Omega_{sup}, U_{sup,z}^{dif}(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_n^u e^{i(k_{n,x}x + k_{sup,n,y}y)}, \quad (4.1.12)$$

$$\forall (x, y) \in \Omega_{sub}, U_{sub,z}^{dif}(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t_n^u e^{i(k_{n,x}x - k_{sub,n,y}y)}, \quad (4.1.13)$$

où  $(r_n^u)$  et  $(t_n^u)$  sont respectivement les coefficients (complexes) de réflexion et de transmission en amplitude pour la composante longitudinale du champ  $\mathbf{U} = \mathbf{E}, \mathbf{H}$  et ce pour chaque ordre. Les composantes transverses, elles, se déduisent des longitudinales grâce au couple (3.3.23) toujours valable. Dans la mesure où le support du champ incident est le superstrat, le champ total vaut

$$\forall \mathbf{r} \in \Omega_{sup}, U_{sup}^{tot}(\mathbf{r}) = U_{sup}^{dif}(\mathbf{r}) + U^{inc}(\mathbf{r}), \quad (4.1.14)$$

$$\forall \mathbf{r} \in \Omega_{sub}, U_{sub}^{tot}(\mathbf{r}) = U_{sub}^{dif}(\mathbf{r}). \quad (4.1.15)$$

L'existence de tels développements hors des superstrat et substrat n'est pas prouvée. Aussi, il nous reste à trouver une base sur laquelle développer le champ dans le réseau; c'est alors qu'interviennent les sources fictives.

### Expression du champ électromagnétique à l'intérieur du réseau

Disposons  $N$  tiges homogènes (diélectriques ou infiniment conductrices), infiniment longues et potentiellement en contact entre elles dans la cellule définie ci-dessus. Il nous faut exprimer le champ à l'intérieur même des  $N$  domaines  $(\Omega_n)$  correspondants

$$\Omega_i = \bigcup_{n=1}^N \Omega_n, \quad (4.1.16)$$

(en ayant repris une notation issue de la section 3.5.3) mais aussi dans leur complémentaire, le milieu « interstitiel »,

$$\Omega_c \setminus \Omega_i. \quad (4.1.17)$$

Notons que le milieu interstitiel  $\Omega_c \setminus \Omega_i$  reste connexe mais non simplement. Il a ses constantes propres

$$\forall \mathbf{r} \in \Omega_c \setminus \Omega_i, \nu(\mathbf{r}) = \nu_c, \quad \nu = \varepsilon, \mu. \quad (4.1.18)$$

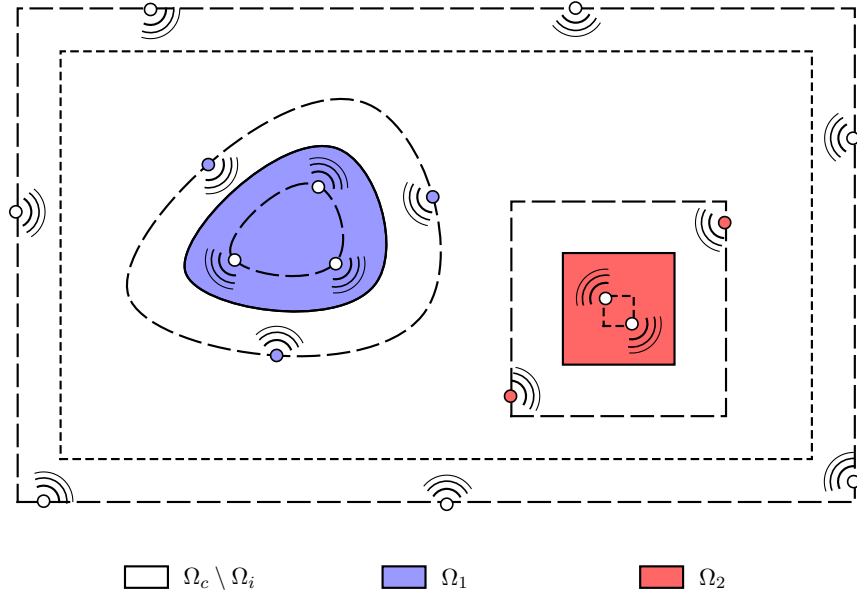


Figure 4.2 – Cas d'un réseau à deux objets par période. À chaque zone homogène est associée une distribution de sources propre.

Cela fait en tout  $N + 1$  ( $N$  objets auxquels s'ajoute la cellule) projections à distinguer car toutes sont effectuées sur des bases différentes. Adaptons les expressions (3.5.16) et (3.5.18) pour obtenir explicitement la forme des champs dans le domaine de la cellule. Il vient, avec  $n$  pris dans  $\{1, \dots, N\}$ ,

$$\forall \mathbf{r} \in \Omega_n, U_{n,z}^{dif}(\mathbf{r}) = \sum_{m=1}^{M_n} \sum_{p=-P_m}^{P_m} u_{e,n,m,p} H_p^{(1)}(\tilde{k}_n \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_{e,n,m}\|) e^{ip(\theta - \theta_{e,n,m})}, \quad (4.1.19)$$

et

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{r} \in \Omega_c \setminus \Omega_i, U_{c,z}^{dif}(\mathbf{r}) = & \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^{M_n} \sum_{p=-P_m}^{P_m} u_{i,n,m,p} H_p^{(1)}(\tilde{k}_c \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_{i,n,m}\|) e^{ip(\theta - \theta_{i,n,m})} \\ & + \sum_{m=1}^{M_c} \sum_{p=-P_m}^{P_m} u_{e,c,m,p} H_p^{(1)}(\tilde{k}_c \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_{e,c,m}\|) e^{ip(\theta - \theta_{e,c,m})}. \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

où  $M_c$  est le nombre de sources hors de la cellule,  $k_c = \sqrt{\varepsilon_c \mu_c} k_0$  et  $\theta_{e,c,m} = \text{angle}(\mathbf{e}_x, \mathbf{s}_{e,c,m})$ . Le champ incident n'étant pas défini dans le réseau, les champs totaux s'identifient aux champs diffractés.

$$\forall \mathbf{r} \in \Omega_c, U_c^{tot}(\mathbf{r}) = \begin{cases} U_c^{dif}(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in \Omega_c \setminus \Omega_i, \\ U_n^{dif}(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in \Omega_n, n \in \{1, \dots, N\}. \end{cases} \quad (4.1.21)$$

#### 4.1.5 Conditions aux limites étendues

L'originalité de cette approche de la méthode des sources fictives repose sur les différents types de conditions aux limites à respecter sur le contour de la cellule élémentaire. En effet, elles sont de deux natures :

1. la continuité des composantes longitudinales,
2. la périodicité au sens du théorème de Bloch.

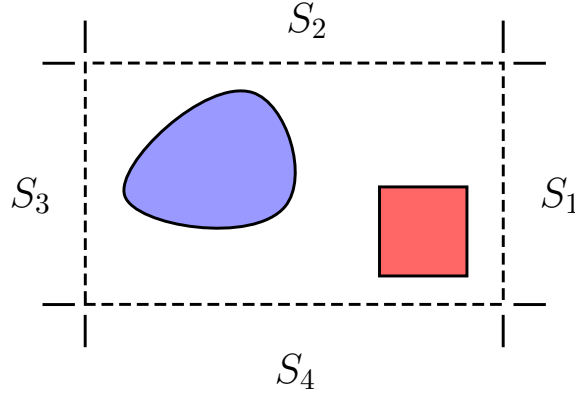


Figure 4.3 – Définition des quatre sections de la cellule élémentaire.

### Raccord avec le milieu environnant

Il y a contact entre le superstrat et la cellule au niveau de la face horizontale supérieure, soit la deuxième section,

$$\forall \mathbf{r} \in S_2, \mathbf{n} \times \left( \mathbf{U}_{c,\parallel}^{tot}(\mathbf{r}) - \mathbf{U}_{sup,\parallel}^{tot}(\mathbf{r}) \right) = \mathbf{0}, \quad (4.1.22)$$

$$\forall \mathbf{r} \in S_2, \mathbf{n} \times \left( \mathbf{U}_{c,\perp}^{tot}(\mathbf{r}) - \mathbf{U}_{sup,\perp}^{tot}(\mathbf{r}) \right) = \mathbf{0} ; \quad (4.1.23)$$

et contact entre le substrat et la cellule au niveau de la face horizontale inférieure, soit la quatrième section,

$$\forall \mathbf{r} \in S_4, \mathbf{n} \times \left( \mathbf{U}_{c,\parallel}^{tot}(\mathbf{r}) - \mathbf{U}_{sub,\parallel}^{tot}(\mathbf{r}) \right) = \mathbf{0}, \quad (4.1.24)$$

$$\forall \mathbf{r} \in S_4, \mathbf{n} \times \left( \mathbf{U}_{c,\perp}^{tot}(\mathbf{r}) - \mathbf{U}_{sub,\perp}^{tot}(\mathbf{r}) \right) = \mathbf{0} ; \quad (4.1.25)$$

où  $\mathbf{U} = \mathbf{E}, \mathbf{H}$ .

### Périodisation

En physique du solide, le théorème de Bloch donne la forme des solutions de l'équation de Schrödinger pour un potentiel périodique donné. Ces dernières, les fonctions de Bloch, sont le produit d'une onde plane par une fonction périodique dont la période est celle du potentiel.

Le théorème de Bloch s'applique de façon analogue à la résolution de l'équation de Helmholtz dans le cadre de structures périodiques en électromagnétisme. Dans notre cas, toutes les conditions sont réunies : le réseau est infini (et parfait) et le potentiel périodique n'est autre que la distribution d'indice optique selon l'axe  $x$ . Ainsi, champs électrique et magnétique sont de la sorte :

$$\forall \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{U}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{r}), \quad (4.1.26)$$

avec  $\{\mathbf{U}, \mathbf{u}\} = \{\mathbf{E}, \mathbf{e}\}, \{\mathbf{H}, \mathbf{h}\}$  et où  $\mathbf{u}$  est une fonction  $\mathbf{p}$ -périodique,

$$\mathbf{u}(\mathbf{r} + \mathbf{p}) = \mathbf{u}(\mathbf{r}). \quad (4.1.27)$$

Il nous faut une condition nécessaire et suffisante à attacher à la cellule afin de simuler le réseau entier. Le théorème de Bloch appliqué au champ sur chacune des parois « verticales »

— à savoir les sections  $S_1$  et  $S_3$  — de la cellule devient

$$\forall \mathbf{r} \in S_3, \mathbf{U}_c^{tot}(\mathbf{r}) = e^{ik_c \cdot \mathbf{r}} \mathbf{u}_c^{tot}(\mathbf{r}), \quad (4.1.28)$$

$$\forall \mathbf{r}' \in S_1, \mathbf{U}_c^{tot}(\mathbf{r}') = e^{ik_c \cdot \mathbf{r}'} \mathbf{u}_c^{tot}(\mathbf{r}'). \quad (4.1.29)$$

Par définition,  $S_1 = S_3 + \mathbf{p}$  et la relation (4.1.29) ne saurait être autre que

$$\forall \mathbf{r} \in S_3, \mathbf{U}_c^{tot}(\mathbf{r} + \mathbf{p}) = e^{ik_c \cdot (\mathbf{r} + \mathbf{p})} \mathbf{u}_c^{tot}(\mathbf{r}). \quad (4.1.30)$$

Une fois combinées, les deux équations (4.1.28) et (4.1.30) conduisent à

$$\forall \mathbf{r} \in S_3, \mathbf{U}_c^{tot}(\mathbf{r} + \mathbf{p}) = e^{ik_c \cdot \mathbf{p}} \mathbf{U}_c^{tot}(\mathbf{r}). \quad (4.1.31)$$

**Remarque** Le théorème de Bloch lie les deux parois latérales de la cellule. Il suffit donc de ne le vérifier que sur l'une des deux ( $S_3$  prise arbitrairement jusqu'à présent), l'autre étant ignorée pendant tout le processus.

#### 4.1.6 Efficacités diffractées et conservation de l'énergie

##### Vecteur de Poynting

La moyenne temporelle du vecteur de Poynting  $\mathbf{S}$  pour l'ordre  $n$  s'écrit

$$\mathbf{S}_n = \frac{1}{2} \text{Re} (\mathbf{E}_n \times \mathbf{H}_n^*). \quad (4.1.32)$$

##### Efficacités diffractées

Elles traduisent la quantité d'énergie emportée par chaque ordre de diffraction et sont directement issues du vecteur de Poynting.

$$\rho_n = \frac{\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{S}_{sup,n}}{\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{S}_0}, \quad (4.1.33)$$

$$\tau_n = \frac{\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{S}_{sub,n}}{\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{S}_0}, \quad (4.1.34)$$

où  $(\rho_n)$  et  $(\tau_n)$  sont respectivement les efficacités diffractées en réflexion et les efficacités diffractées en transmission.

Normalisons l'onde plane incidente de telle sorte que

$$\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{S}_0 = 1 \quad (4.1.35)$$

et supposons que superstrat et substrat soient sans pertes. Nous pouvons exprimer simplement les efficacités en fonction des grandeurs auxquelles nous avons directement accès, à savoir les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude.

$$\rho_n = \frac{k_0 k_{sup,n,y}}{\tilde{k}_{sup}^2} \left( \varepsilon_{sup} |r_n^e|^2 + \mu_{sup} |r_n^h|^2 \right), \quad (4.1.36)$$

$$\tau_n = \frac{k_0 k_{sub,n,y}}{\tilde{k}_{sub}^2} \left( \varepsilon_{sub} |t_n^e|^2 + \mu_{sub} |t_n^h|^2 \right). \quad (4.1.37)$$

### Conservation de l'énergie

Si la totalité des matériaux sont sans pertes, alors la validation des calculs numériques passe par la vérification de ce théorème.

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \rho_m + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tau_n = 1. \quad (4.1.38)$$

L'écart vis-à-vis de l'unité obtenu donnera une idée de la précision du résultat numérique. Ce critère peut être renforcé par l'observation d'une faible erreur résiduelle au sens des moindres carrés.

### 4.1.7 Illustrations

#### Réseau de « F » métalliques

**Structure et champ incident** Afin de montrer la tolérance de la méthode des sources fictives vis-à-vis de formes exotiques, nous prenons comme exemple, au hasard, le caractère « F ». Le réseau est la répétition infinie suivant  $x$  d'un « F » infiniment conducteur avec une période égale à vingt,

$$p = 20. \quad (4.1.39)$$

La partie métallique du réseau flotte dans le vide,

$$\varepsilon_{sup} = \varepsilon_{sub} = \varepsilon_c = 1, \quad (4.1.40)$$

$$\mu_{sup} = \mu_{sub} = \mu_c = 1. \quad (4.1.41)$$

Les limites supérieure et inférieure de la cellule,  $y_{min}$  et  $y_{max}$ , ainsi que la position de l'objet relativement à elle sont arbitraires<sup>2</sup>.

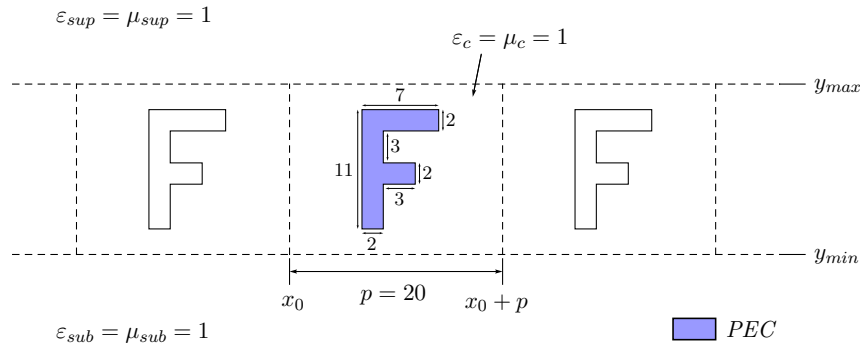


Figure 4.4 – Dimensions du glyphe et période du réseau.

Cette structure a l'avantage de pouvoir être traitée par un code numérique basé sur la méthode modale (exacte) car on peut la subdiviser en une série de lamelles rectangulaires faites de vide ou de métal infiniment conducteur. Cela nous a permis de valider les calculs issus du code basé sur la méthode des sources fictives.

Concernant le champ incident, la structure est éclairée par une onde plane venant<sup>3</sup> « d'en-dessous » et dont les caractéristiques sont :

$$\lambda_0^{inc} = 2, \theta^{inc} = 135^\circ, \phi^{inc} = 120^\circ, \delta^{inc} = 0^\circ. \quad (4.1.42)$$

<sup>2</sup>Lorsque les propriétés optiques du milieu interstitiel, du superstrat et du substrat sont identiques.

<sup>3</sup>Le réseau simulé est en fait renversé de telle sorte que le champ incident soit effectivement défini dans le superstrat. Cela n'entre pas en contradiction avec la définition initiale de son support : le superstrat et non le substrat.

L'objet se résume à une série de 800 points placés à l'aide d'une série de Fourier (voir la section C.1.2 en annexe) dont le nombre total d'harmoniques a été fixé à 101 de telle sorte que les angles droits soient suffisamment bien décrits. La cellule est, elle, décrite par quatre segments discrétisés linéairement ; le nombre de points sur son pourtour est de 496.

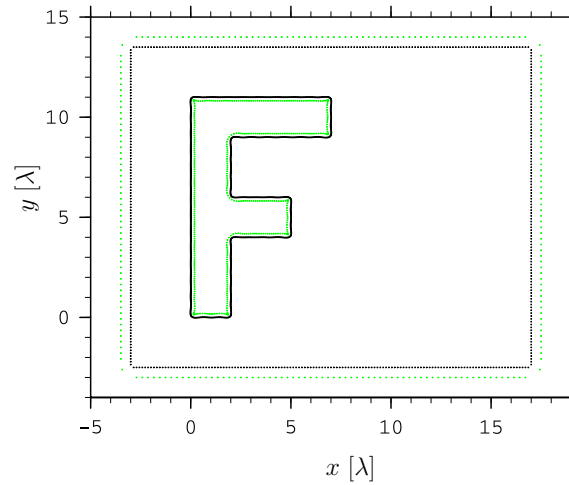


Figure 4.5 – L'objet (800 points noirs), la cellule rectangulaire (496 points noirs) ainsi que leur collection de sources respective (400 plus 248 points verts).

Le « F » ne nécessite pas de sources externes car le champ interne est nul (par définition) ; *a contrario*, le champ qu'il diffracte est généré par un ensemble de 400 monopôles répartis à l'aide de la méthode des triangles. De même, la cellule n'a pas de sources internes à proprement parler car le champ externe est projeté sur une base de Fourier, 51 ordres dans le superstrat et 51 autres dans le substrat, alors que le champ interne est rayonné par une série de 248 monopôles placés à l'aide de la méthode des triangles également.

**Performances numériques** La matrice système est générée en deux étapes. Dans un premier temps, elle appartient à  $\mathbb{C}^{5184 \times 2300}$  mais contient un certain nombre de lignes et de colonnes nulles du fait de la présence de métal infiniment conducteur. Ces lignes et ces colonnes sont éliminées et  $A$  est retaillée ; elle appartiendra finalement à  $\mathbb{C}^{3940 \times 1500}$ . Le temps de génération de cette matrice est approximativement de 18.7 secondes.

Méthode de résolution	Erreur numérique ( $\tilde{\rho}_2$ )	Somme des efficacités	Temps de résolution
SVD	$2.1 \times 10^{-1}$	0.999919124769	19 min 1.7 s
QR	$2.1 \times 10^{-1}$	0.999933836853	7 min 43.3 s
Cholesky	$4.8 \times 10^{-2}$	0.999933836853	1 min 24.5 s

Tableau 4.1 – Temps et précisions des calculs dans le cas du réseau de « F » métalliques en utilisant différentes méthodes de résolution sur un processeur Intel Core 2 Duo T7300 cadencé à 2 GHz.

**Cartes de champ** Ce couple de cartes montre le parfait accord entre la méthode des sources fictives et la méthode modale pour laquelle la structure en question est, seulement depuis peu [N16], un cas d'école.



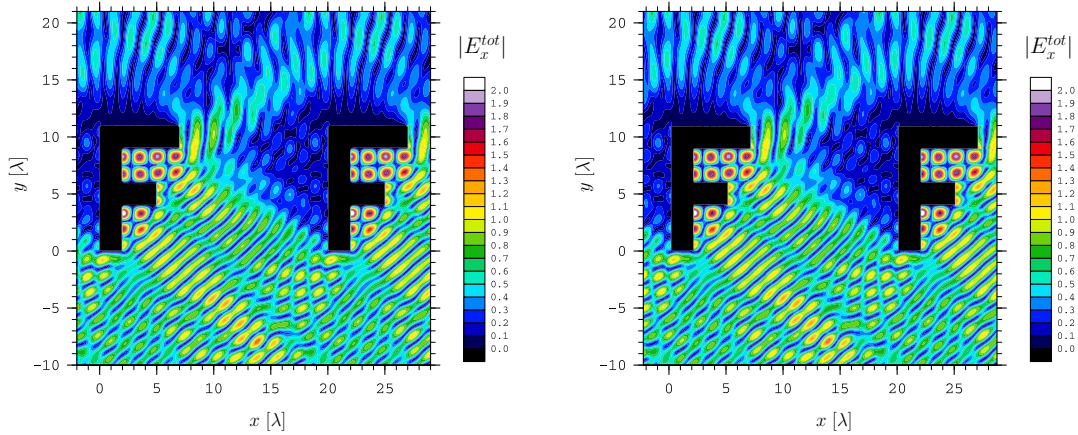


Figure 4.6 – À gauche : la projection suivant l'axe  $x$  du champ électrique total au voisinage de la structure (normalisée à 2), méthode des sources fictives ; à droite : la même carte de champ à l'aide de la méthode modale.

### Cristal d'épaisseur finie

**Structure et champ incident** Un cristal photonique d'épaisseur finie peut être vu comme un réseau de diffraction (infini dans une direction) dont la maille élémentaire présente elle-même une certaine forme de périodicité suivant une direction autre que celle du réseau « principal ». La hauteur de la cellule fixe le nombre de périodes tandis que la direction de périodicité interne à la cellule détermine la forme de la maille élémentaire du cristal (rectangulaire, hexagonale, etc.).

Prenons comme exemple un cristal photonique de maille rectangulaire se limitant à neuf périodes en épaisseur. La période suivant la direction  $x$  est  $p_x$  et celle suivant la direction  $y$  vaut  $p_y$ . Ici,

$$p_x = 7 \text{ et } p_y = 4. \quad (4.1.43)$$

La hauteur du cristal vaut donc trente-six et nous choisissons

$$y_{min} = -18 \text{ et } y_{max} = 18. \quad (4.1.44)$$

Le motif élémentaire est une superellipse [N17] (voir la section C.1.1 en annexe) de paramètres

$$\{a, b, p, \alpha, \beta, \gamma\} = \{0.85, 0.85, 4, 2, 4, 13\}, \quad (4.1.45)$$

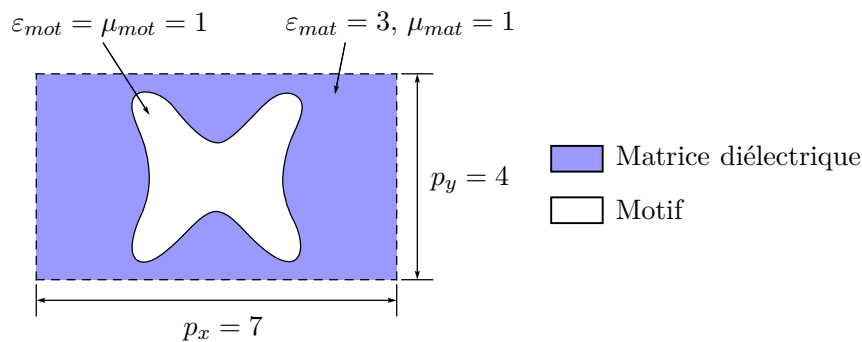


Figure 4.7 – Période du cristal.

et la structure complète est une matrice diélectrique  $(\varepsilon_{mat}, \mu_{mat})$  solide percée de neuf motifs  $(\varepsilon_{mot}, \mu_{mot})$  suivant  $y$  et d'une infinité d'autres suivant  $x$ .

$$\varepsilon_{mat} = 3, \mu_{mat} = 1; \quad (4.1.46)$$

$$\varepsilon_{mot} = 1, \mu_{mot} = 1. \quad (4.1.47)$$

Le bloc diélectrique constituant le cristal flotte dans le vide,

$$\varepsilon_{sup} = 1, \mu_{sup} = 1; \quad (4.1.48)$$

$$\varepsilon_{sub} = 1, \mu_{sub} = 1. \quad (4.1.49)$$

Concernant le champ incident, la structure est éclairée par une onde plane polarisée TE venant « du dessus » et dont les caractéristiques sont :

$$\lambda_0^{inc} = 2.5, \theta^{inc} = 50^\circ, \phi^{inc} = 0^\circ, \delta^{inc} = 0^\circ. \quad (4.1.50)$$

**Aspects numériques** La cellule est décrite par 648 points équirépartis sur un rectangle de dimensions  $p_x \times 9p_y$  tandis que chaque superellipse est un ensemble de 150 points dont les coordonnées obéissent à la loi (C.1.2). Le champ dans la cellule est généré par les sources situées à l'extérieur de la cellule — au nombre de 324 — ainsi que par les sources à l'intérieur de chaque objet —  $9 \times 75$  en tout. Dans chaque motif, il est généré par les 75 sources concernées. Toutes les sources sont des monopôles placés à l'aide de la méthode des triangles.

Dans le superstrat comme dans le substrat, le champ est distribué sur un développement de Rayleigh contenant 29 ordres.

Comme précédemment, la matrice système est générée en deux étapes. Dans un premier temps, elle appartient à  $\mathbb{C}^{7992 \times 3464}$  mais contient un certain nombre de lignes et de colonnes nulles. Ces lignes et ces colonnes sont éliminées et  $A$  est retaillée ; elle appartiendra finalement à  $\mathbb{C}^{6904 \times 3464}$ . Le temps de génération de cette matrice est approximativement de 49.8 secondes.

Méthode de résolution	Erreur numérique ( $\tilde{\rho}_2$ )	Somme des efficacités	Temps de résolution
Cholesky	$1.9 \times 10^{-1}$	1.00036093052	16 min 59.7 s

Tableau 4.2 – Temps et précision des calculs dans le cas du cristal photonique d'épaisseur finie (processeur Intel Core 2 Duo T7300 cadencé à 2 GHz).

La structure est complexe et les calculs convergent lentement. Bien que la somme des efficacités soit proche de l'unité, l'erreur numérique est encore trop élevée pour être sûrs de l'exactitude du résultat. Le champ électrique longitudinal (figure 4.8) est cependant bien continu partout. Il serait sans doute avantageux de tirer parti de la robustesse des méthodes itératives pour des simulations de cette complexité.

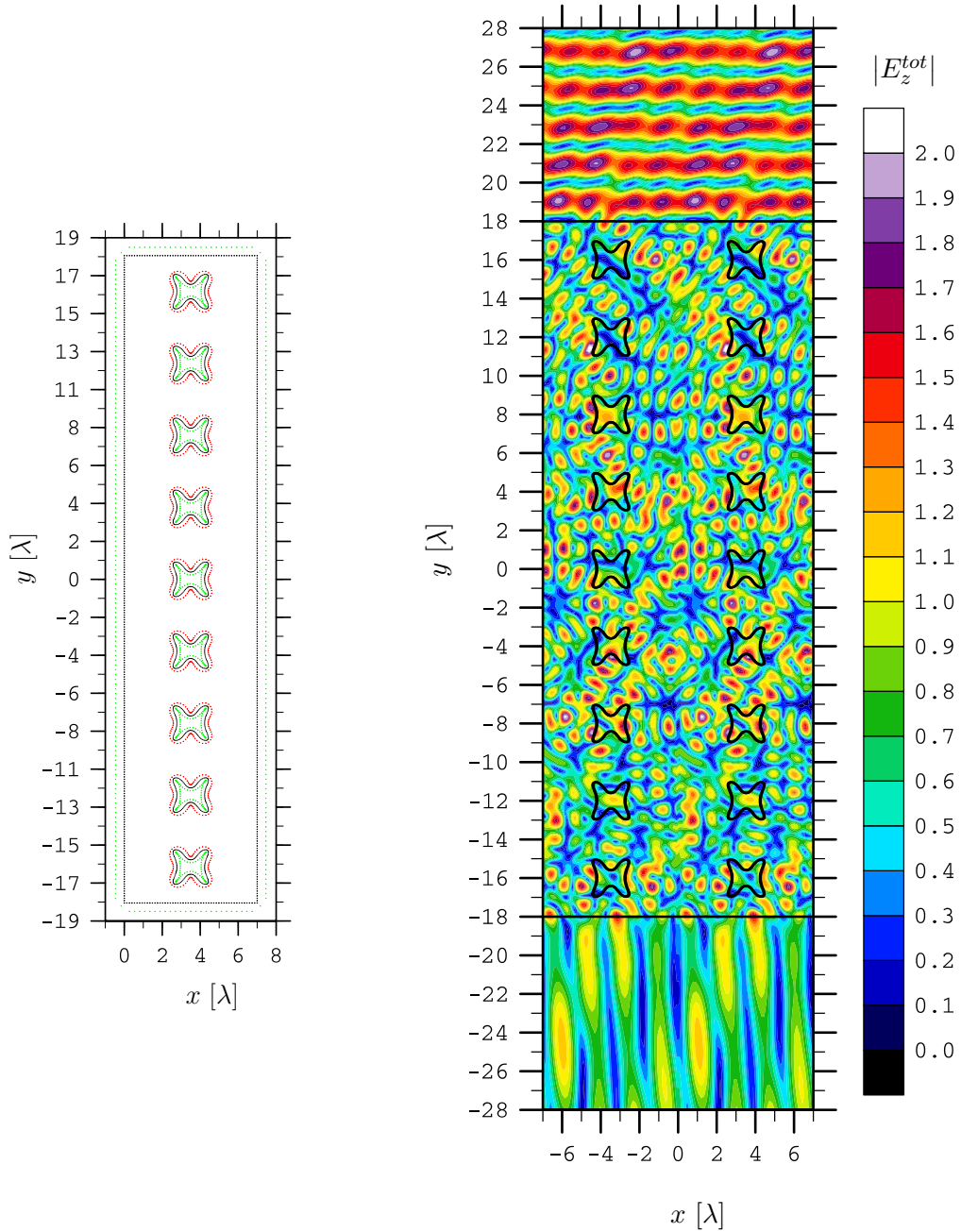


Figure 4.8 – À gauche : discrétisation de la cellule, des superellipses et placement des sources. À droite : la projection suivant l'axe  $z$  du champ électrique total au voisinage de la structure et sur deux périodes (normalisée à 2).

## 4.2 Méthode des sources fictives et guides d'ondes

### 4.2.1 Capacités de la méthode

Les guides d'ondes interviennent massivement en physique lorsqu'une transmission de données en milieu clos (contrairement à la diffusion en espace libre d'un signal par une antenne) s'avère nécessaire.

Les guides à base de matériaux diélectriques comme la silice intéressent la communauté

de l'optique (fibres optiques, cristaux photoniques avec défauts, etc.) tandis que ceux à base de métal trouvent principalement leur utilité dans le secteur des micro-ondes (antennes, guides d'alimentation, etc.).

Le développement d'un code numérique basé sur la méthode des sources fictives et à même de traiter cette catégorie de problèmes se place dans ce dernier contexte, à savoir : les guides d'ondes **métalliques clos**. L'étude de guides nécessitant une recherche de modes dans le plan complexe (en ce qui concerne la constante de propagation) n'est pas prévue car particulièrement difficile et sortant du cadre de cette thèse.

En théorie et pour un guide donné, la méthode des sources fictives nous permet

- d'accéder à la relation de dispersion des différents modes propagatifs,
- de tracer les cartes de champs pour tous les modes pris séparément.

Comme expliqué depuis le début de ce chapitre, la méthode des sources fictives ne nous contraint pas à certaines géométries figées et se prête bien aux structures faisant intervenir du métal.

### 4.2.2 Formulation du problème et résolution numérique

Si les relations de dispersion de modes se propageant dans des guides de section simple (rectangulaires, circulaires, câbles coaxiaux, etc.) peuvent être rapidement obtenues de manière analytique, celles de guides asymétriques ou bien symétriques mais compliqués nécessitent un traitement numérique.

#### Modes propagatifs

Un mode est une solution en puissance des équations de Maxwell dans le guide et il existe indépendamment d'une quelconque alimentation. Dans la formulation de la méthode des sources fictives, cela revient à considérer un champ incident nul. La nature du problème posé change : ce n'est plus un cas de diffraction mais une recherche de modes.

Nous nous intéressons aux solutions non-nulles d'un système linéaire homogène généralement surdéterminé,

$$Ax = 0, \quad (4.2.1)$$

avec  $A \in \mathbb{C}^{n \times p}$ . N'oublions pas que les coefficients de  $A$  dépendent de la pulsation,  $\omega$ , comme de la constante de propagation suivant l'axe d'invariance du guide,  $k_z$ . Ainsi, si le couple  $(\omega, k_z)$  vérifie la relation de dispersion de l'un des modes guidés, alors le système admet au moins une solution non-nulle ; sinon, le système n'admet pas d'autre solution que la solution triviale, laquelle est dépourvue d'intérêt.

À ce point de la formulation du problème, une résolution numérique directe n'est pas envisageable car nous obtiendrions constamment la solution nulle. Il faut donc procéder autrement, de manière à sélectionner la ou les solutions adéquates.

#### Méthode des moindres carrés

D'une configuration à l'autre, le nombre de points, de sources et, conséquemment, d'équations et d'inconnues varie beaucoup. Il est donc très difficile de maîtriser par avance les dimensions de la matrice système et celle-ci n'est que rarement carrée. De plus, le fait de forcer  $n$  et  $p$  identiques nous éloigne des conditions pour assurer la convergence des calculs en fonction de la précision de la discrétisation des profils.

Comme précédemment, nous pouvons nous servir du critère des moindres carrés pour approcher une solution. Il « suffit » donc de multiplier  $A$  à gauche par sa transposée

conjuguée (le coût de la multiplication de la matrice  $A$  par sa transposée conjuguée est de  $2np^2$  opérations) afin de travailler sur un système carré,

$$A'x = 0. \quad (4.2.2)$$

$A' \in \mathbb{C}^{p \times p}$  est une matrice **hermitienne** et est par conséquent **diagonalisable**. Ses valeurs propres seront notées  $(\lambda_q)$  et les vecteurs propres qui leur sont associés,  $(x_q)$ .

La méthode des moindres carrés nous permet donc de redéfinir le problème initial posé par la méthode des sources fictives comme un problème aux valeurs propres. Le système admet au moins une solution non-nulle si

$$\exists q \in \{1, \dots, p\} : A'x_q = 0, \quad (4.2.3)$$

soit

$$\lambda_q = 0. \quad (4.2.4)$$

Ainsi, pour une fréquence et une constante de propagation données, nous pourrions dire qu'un ou plusieurs modes existent si autant de valeurs propres s'annulent. Dans ces conditions, les vecteurs propres associés aux éléments nuls du spectre sont les amplitudes complexes des sources fictives utilisées pour générer les distributions de champs propres à chacun de ces modes.

### 4.2.3 Recherche, détection et génération de modes

#### Recherche de modes propagatifs

Les structures que nous cherchons à caractériser sont closes (par une paroi infiniment conductrice) et les milieux qui les constituent sont supposés sans pertes. Contrairement au cas des fibres optiques, cela interdit la détection de modes dont l'indice effectif ait une partie imaginaire différente de zéro ( $k_z$  purement réelle), c.-à-d. des modes évanescents. C'est pourquoi il nous suffit de faire varier  $\omega$  et  $k_z$  sur l'axe réel uniquement.

$$(\omega, k_z) \in ]0, \infty[ \times ]0, \infty[. \quad (4.2.5)$$

Pour notre étude, cette condition est peu restrictive et nous permet de grandement simplifier la détection de résonances. En effet, dans le cas contraire, il aurait fallu effectuer cette recherche selon trois variables : pour chaque pulsation  $\omega$  donnée, une recherche de résonance dans le plan complexe ( $\text{Re}(k_z)$ ,  $\text{Im}(k_z)$ ) s'avérerait nécessaire.

#### Critères de détection

**Déterminant** En théorie, si au moins une valeur propre s'annule alors le déterminant fait de même et l'ensemble des relations de dispersion obéit à l'équation implicite

$$\det(A'(\omega, k_z)) = \prod_{q=1}^p \lambda_q = 0. \quad (4.2.6)$$

De manière générale, les dimensions de la matrice  $A'$  sont suffisamment importantes pour que le déterminant soit hors des grandeurs réelles représentables par une machine en double précision,

$$|\text{réel double précision}| \lesssim 10^{308}. \quad (4.2.7)$$

La valeur du déterminant ne nous intéresse pas en soi, cependant c'est son comportement autour de zéro qui importe. Désormais, pour parer à ce problème numérique, nous ne considérerons plus le déterminant lui-même mais son logarithme décimal. Le critère (4.2.6) devient

$$\log_{10} (\det (A'(\omega, k_z))) \rightarrow -\infty. \quad (4.2.8)$$

Pour des cas peu complexes, la matrice système  $A'$  est petite et le calcul du déterminant se passe bien. La détection de modes est alors très facile car le déterminant « signe » très bien. Cependant, pour des cas plus complexes, le seul logarithme du déterminant ne suffit plus car ses variations peuvent être extrêmement faibles. Il peut s'avérer utile de considérer la dérivée seconde de ce logarithme,

$$\frac{\partial^2}{\partial \omega^2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial k_z^2} \log_{10} (\det (A'(\omega, k_z))) \right] \rightarrow \infty. \quad (4.2.9)$$

Si ce critère ne suffit pas non plus, la détection de modes s'avère impossible pour cette formulation du problème.

**Spectre** La rapidité des calculs est ici cruciale car en balayant l'espace  $(\omega, k_z)$  avec une résolution suffisamment importante, les temps de calculs s'accumulent. Si la complexité de la structure vient à augmenter, les dimensions de la matrice dont les valeurs propres sont à calculer augmentent en conséquence.

Lorsque le temps de calcul pour une itération devient prohibitif, il peut être utile de ne calculer que certaines parties du spectre. Si l'on ne s'intéresse qu'à une valeur propre en particulier (indexée par  $q$ ), il faut la normaliser par rapport à la norme de la matrice considérée. En considérant des valeurs propres rangées par ordre croissant, ce nouveau critère s'écrit

$$q \in \{1, \dots, N\}, \quad \frac{\lambda_q}{\lambda_p} \rightarrow 0. \quad (4.2.10)$$

Généralement, on s'intéressera au rapport  $\lambda_1/\lambda_p$ .

### Importance de l'algorithme de calcul

Si un même calcul est répété un nombre de fois non-négligeable, le choix de la méthode et l'efficacité de l'algorithme utilisé montrent toute leur importance. Supposons que, pour tracer la relation de dispersion d'un guide donné, nous ayons besoin de 200 points suivant  $\omega$  et autant suivant  $k_z$ . Si le guide est compliqué, le temps d'un calcul élémentaire serait typiquement de *huit secondes* sur une machine performante. Cela ramène le temps d'exécution total du programme à près de *quatre-vingt-neuf heures*...

**Calcul d'un déterminant** Le coût d'un calcul de déterminant varie énormément suivant la méthode utilisée pour l'évaluer. Le calcul du spectre est inutile dans ce cas car une factorisation de la matrice système suffit.

Comme explicité précédemment, la factorisation de Cholesky (3.7.34) rend le calcul du déterminant de la matrice système très simple,

$$\det(A') = \det(T) \det(T^\dagger) = \prod_{i=1}^p |t_{ii}|^2. \quad (4.2.11)$$

Bien que la matrice système soit hermitienne et que l'algorithme de Cholesky soit à préférer de prime abord, il ne faut pas pour autant éliminer la factorisation QR dont la sensibilité vis-à-vis du conditionnement de  $A'$  est moindre.

La méthode de la factorisation QR permet de ramener le calcul du déterminant au simple produit des valeurs sur la diagonale de  $R$ . Reprenons la définition (3.7.19) et le calcul du déterminant est alors très simple,

$$\det(A') = \det(Q) \det(R) = \det(R) = \prod_{i=1}^p r_{ii}. \quad (4.2.12)$$

**Calcul d'un spectre** Concernant les matrices hermitiennes (les matrices symétriques au sens des complexes), la librairie LAPACK fournit une série de routines à même de calculer tout ou partie du spectre et optionnellement les vecteurs propres associés. Citons parmi elles : (Z)HEEV, (Z)HEEVD (algorithme *Divide and Conquer*), (Z)HEEVX et (Z)HEEVR (*Relatively Robust Representations*). Les algorithmes sous-jacents font, pour certains, intervenir des factorisations orthogonales (QR, SVD, etc.).

### Problèmes rencontrés

La question du placement des points et des sources se pose à nouveau dans la recherche de modes. En effet, si points et sources sont placés comme il faut, la détection d'un mode sera aisée. Dans le cas contraire, l'évolution du déterminant ne sera pas marquée par des résonances franches. Pour une configuration compliquée, nous constatons au mieux quelques points d'inflexion voire, au pire, aucun changement de variation.

Si la méthode des sources fictives peut, en théorie, tolérer toutes sortes de géométries, c'est en lui donnant à chaque fois un problème bien posé. Dans la mesure où il n'existe pas de règle absolue sur la discrétisation des profils ainsi que sur l'emplacement des sources, la certitude sur la détection d'un mode n'est pas assurée.

Les fonctions de base pour la méthode des sources fictives sont les fonctions de Hankel et ces dernières ont la propriété d'être singulières à l'origine. Lorsque nous cherchons à détecter un mode dans le cas où sa constante de propagation est presque entièrement longitudinale,

$$k_z \rightarrow k_0 \Leftrightarrow \tilde{k} \rightarrow 0, \quad (4.2.13)$$

alors les fonctions de base explosent. Cela est généralement le cas lorsque l'on cherche à exciter un mode quasi-TEM dont l'indice effectif est proche de l'unité.

Pour une source placée en  $\mathbf{r}_0$ ,

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \lim_{\tilde{k} \rightarrow 0} H_p^{(1)}(\tilde{k} \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|) = \infty. \quad (4.2.14)$$

La norme de la matrice  $A'$  croît d'autant et cela rend le calcul du déterminant relativement hasardeux.

## 4.2.4 Exemples

### Cas élémentaire du guide rectangulaire

Les propriétés en fréquence des guides rectangulaires métalliques étant parfaitement connues, cet exemple numérique a pour but d'illustrer certains aspects du comportement

de la méthode des sources fictives appliquée aux structures guidantes. Par ailleurs, nous nous contenterons de détecter les pulsations de coupure des premiers modes.

Soit un guide rectangulaire de dimensions  $d_x \times d_y$  dont les parois sont infiniment conductrices (*PEC*) et dont le cœur est diélectrique ( $\varepsilon, \mu$ ). Les pulsations de coupure des différents modes obéissent à la loi

$$\omega_{c,p,q} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \sqrt{\left(\frac{p\pi}{d_x}\right)^2 + \left(\frac{q\pi}{d_y}\right)^2}, \quad p, q \in \mathbb{N}. \quad (4.2.15)$$

Prenons le jeu de données suivant :

$$d_x = 1, d_y = 0.5 \text{ et } \varepsilon = \mu = 1. \quad (4.2.16)$$

Les pulsations de coupure des premiers modes sont regroupées par ordre croissant dans le tableau ci-dessous.

Polarisation	$p$	$q$	$\lambda_{c,p,q}$	$\omega_{c,p,q}$
TE	1	0	2.0	3.14
TE	0	1	1.0	6.28
TE	2	0	1.0	6.28
TE/TM	1	1	0.89	7.02
TE/TM	2	1	0.71	8.89

Tableau 4.3 – *Pulsations de coupure des sept premiers modes du guide rectangulaire.*

Le guide est modélisé par une série de 96 points de telle sorte que les sommets soient ignorés. D'une paroi à l'autre, les points sont équirépartis. Le champ interne est projeté sur une base de 96 sources réparties autour de l'objet à l'aide de la « méthode des triangles » ; la présence de sources internes est superflue car le champ extérieur est rigoureusement nul.

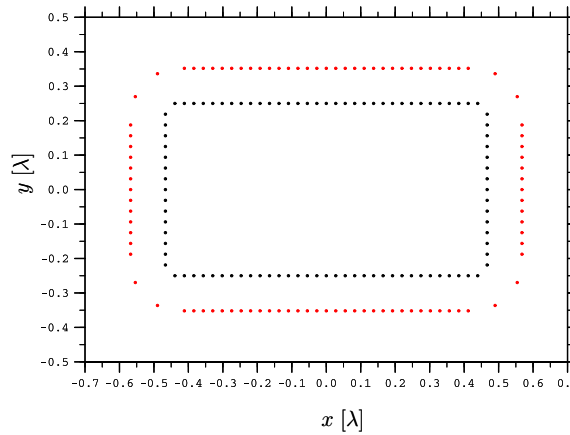


Figure 4.9 – *Discretisation du guide (en noir) et placement des sources (en rouge).*

Une fois  $k_z$  fixée à zéro, l'espace des fréquences est balayé et, à chaque itération, le logarithme du déterminant de  $A'$  est calculé. Son évolution est tracée sur le graphe 4.10. La discrétisation des contours n'a pas été raffinée au fur et à mesure des itérations mais la détection des modes reste relativement stable en fréquence. Cependant, pour ce cas d'apparence très simple, la position ainsi que le nombre de sources et de points jouent



énormément sur le « piqué » de la courbe à l'endroit des pulsations de coupure. Il faut plusieurs essais pour obtenir des données significatives.

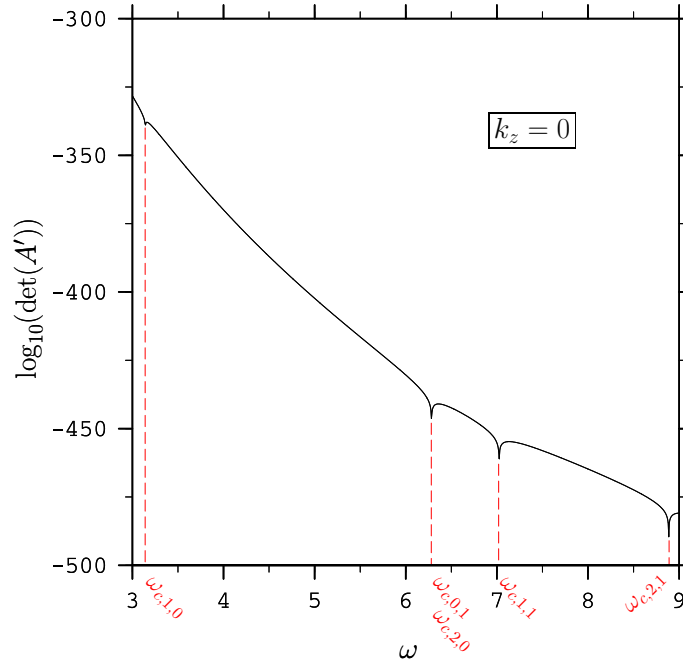


Figure 4.10 – Évolution logarithmique du déterminant de la matrice  $A'$ . Détection des pulsations de coupure de modes du guide rectangulaire.

### Guide de section quelconque

Afin de sortir du cas d'école du guide rectangulaire et d'illustrer la polyvalence de la méthode des sources fictives, considérons un guide non simplement connexe fait d'objets infiniment conducteurs. Les formes invoquées sont suffisamment compliquées pour que la relation de dispersion ne soit pas facilement calculable analytiquement.

Le guide est constitué de cinq objets distincts (voir la figure 4.11). Une section droite de l'ensemble voit

1. une enceinte métallique circulaire,
2. trois disques *PMC* (matériau dont la définition se trouve au niveau de la sous-section 1.3.2),
3. une superellipse métallique à trois branches de paramètres (se référer à la section C.1.1 en annexe)

$$\{a, b, p, \alpha, \beta, \gamma\} = \{0.85, 0.85, 3, 5, 18, 18\}. \quad (4.2.17)$$

L'enceinte métallique dont le rayon vaut 2 est modélisée par une série de 100 points; les disques *PMC*, dont les rayons valent 0.4, sont chacun modélisés par une série de 30 points; la superellipse à trois branches est quant à elle modélisée par 150 points. Les sources propres à l'enceinte sont des monopôles disposés à l'aide de la méthode des triangles. On en compte 50 à l'extérieur du guide et 75 dans la tige à trois branches. Concernant les trois objets *PMC*, on leur affecte à chacun un multipôle à 11 ordres placé en leur centre.

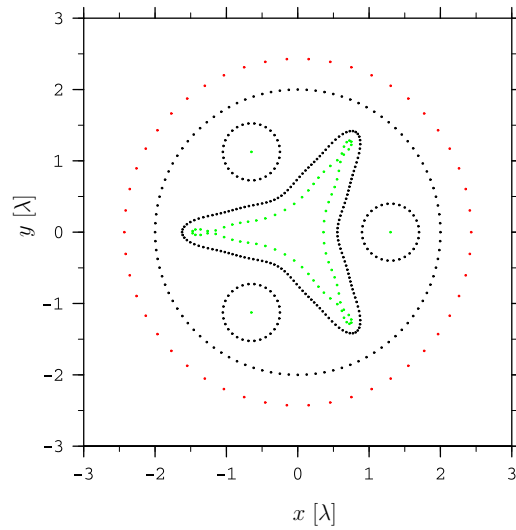


Figure 4.11 – Discretisation du guide (en noir), sources externes (en rouge) et sources internes (en vert).

Comme précédemment, nous avons accès aux pulsations de coupure des différents modes en traçant l'évolution du déterminant en fonction de la pulsation (figure 4.12 en haut).

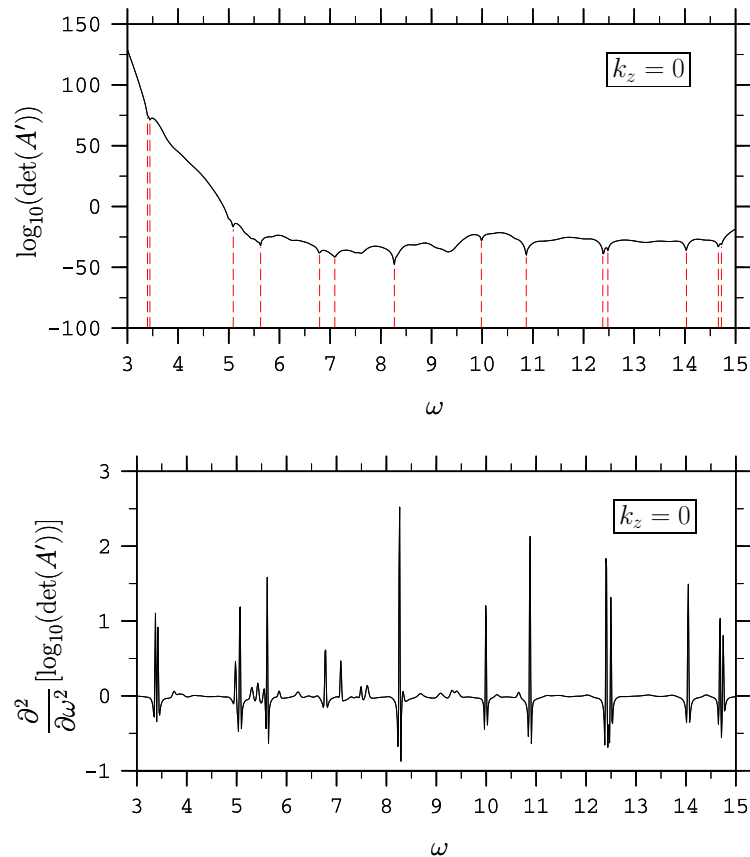


Figure 4.12 – Évolution logarithmique du déterminant de la matrice  $A'$  (en haut) et sa dérivée seconde en pulsation (en bas). Les principales pulsations de coupures (indiquées en rouge) correspondent à des maxima de la dérivée seconde.

Considérer la dérivée seconde permet de s'affranchir de la dynamique du logarithme du déterminant (importante si l'on parcourt un grand espace en constante de propagation et en pulsation) et de faire ressortir la plupart des résonances. Ce procédé est utilisé pour générer la relation de dispersion que montre la figure 4.13.

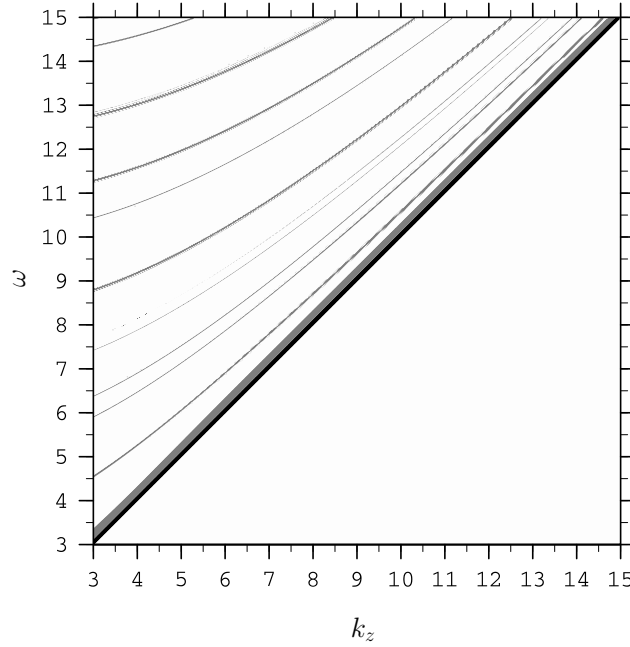


Figure 4.13 – Relation de dispersion du guide « quelconque ».

**Remarque** Cette carte, dont la résolution est de  $551 \times 551$  pixels, a été générée en approximativement 24 heures sur deux processeurs Intel<sup>®</sup> Itanium<sup>®</sup> 2 à raison de 1.12 secondes par point en utilisant une factorisation de Cholesky (les points pour lesquels  $k_z > \omega$  sont ignorés).

**Génération d'un mode** Pour accéder aux cartes de champ d'un mode en particulier, il « suffit » d'extraire le vecteur propre (les coefficients de pondération des pôles de toutes les sources) correspondant à la plus petite des valeurs propres de la matrice  $A'$ .

Intéressons-nous au mode de plus basse fréquence de coupure apparaissant sur la carte 4.13. Il s'avère que ce mode est TM et les cartes de champ seront tracées pour le couple

$$k_z = 3, \omega = 4.532. \quad (4.2.18)$$

Sur les figures à suivre, les champs électrique et magnétique ainsi que le vecteur de Poynting sont normalisés à l'unité. Leurs composantes nulles — la partie transverse de  $\mathbf{S}$  ainsi que la composante longitudinale de  $\mathbf{H}$  — ne sont pas représentées.

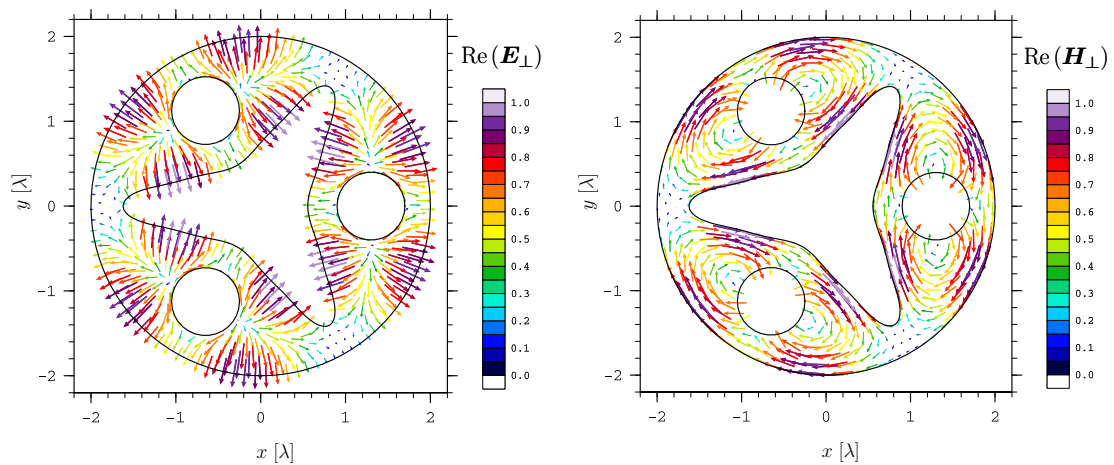


Figure 4.14 – Champs électrique (à gauche) et magnétique (à droite) transverses reignant dans le guide au point de fonctionnement  $k_z = 3$ ,  $\omega = 4.532$ .

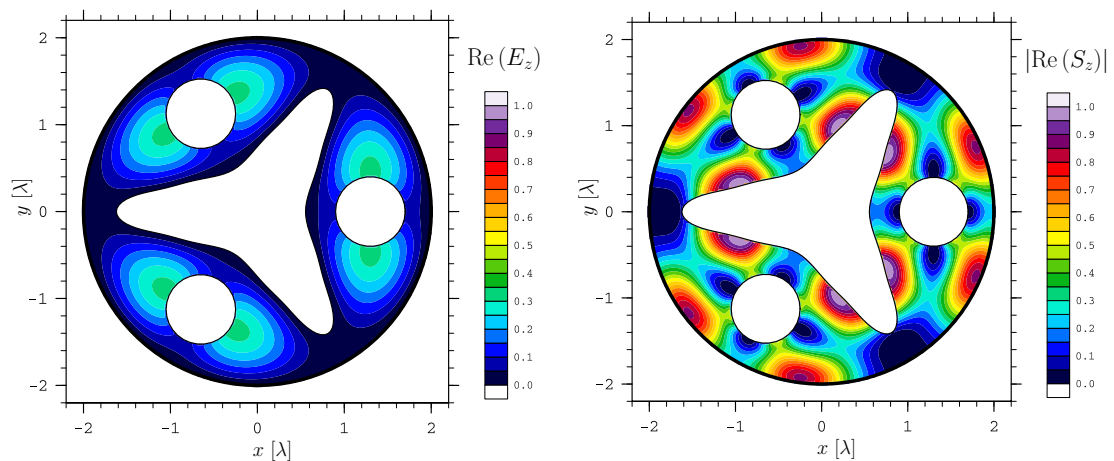


Figure 4.15 – Champ électrique longitudinal (à gauche) et vecteur de Poynting (à droite) au point de fonctionnement  $k_z = 3$ ,  $\omega = 4.532$ .

**Remarque** Jusqu'à présent, pour des soucis de simplicité, il n'a été question que d'objets simplement connexes. Quoiqu'il en soit, l'enceinte métallique est, à l'échelon numérique, un objet à part. Cet objet n'est autre qu'un objet dérivé de la « cellule » employée dans la section 4.1 concernant les réseaux et est, par nature, non simplement connexe.



## **Troisième partie**

# **Optimisation de l'efficacité de surface en sortie d'une antenne résonante compacte**



## Chapitre 5

# Génération d'un mode quasi-TEM uniforme guidé

### Sommaire

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>89</b>
<b>5.2</b>	<b>Surfaces compatibles avec la propagation d'un mode quasi-TEM uniforme</b>	<b>92</b>
<b>5.3</b>	<b>Étude d'une surface <i>PMC</i> ouverte</b>	<b>94</b>
<b>5.4</b>	<b>Surfaces <i>hard</i></b>	<b>97</b>
<b>5.5</b>	<b>Approche simplifiée de la relation de dispersion d'un guide <i>hard</i></b>	<b>106</b>
<b>5.6</b>	<b>Étude numérique de guides <i>hard</i></b>	<b>110</b>
<b>5.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>119</b>

## 5.1 Introduction

### 5.1.1 Contexte d'étude

Cette étude s'inscrit dans le cadre d'un projet industriel mené par Thales Alenia Space et dont l'objectif est la réalisation de réseaux d'antennes à commande de phase ou *Electronically Scanned Arrays* (ESA). Les domaines d'application des ESA sont principalement l'industrie militaire, le spatial et la météorologie pour la réalisation de systèmes radars embarqués (voir figure 5.1) ou au sol.

À un instant donné, le diagramme de rayonnement de l'antenne complète est fonction de l'amplitude et de la phase du rayonnement issu de chaque antenne élémentaire constituant une maille du réseau. Il est donc primordial de connaître les spécifications ainsi que de maîtriser les performances de l'élément rayonnant pris seul. Celles-ci obéissent à un cahier des charges et sont naturellement fonctions de l'application envisagée.

Concernant les ESA qui intéressent Thales Alenia Space, les éléments rayonnants doivent avoir les caractéristiques suivantes :

- une forte efficacité de surface,
- un faible encombrement et une faible masse,
- la capacité à être excités de manière compacte en simple ou bipolarisation,
- la capacité à intégrer des équipements actifs au plus près du plan rayonnant,
- un diagramme de rayonnement compatible avec l'application visée,
- une bande passante compatible avec l'application visée.



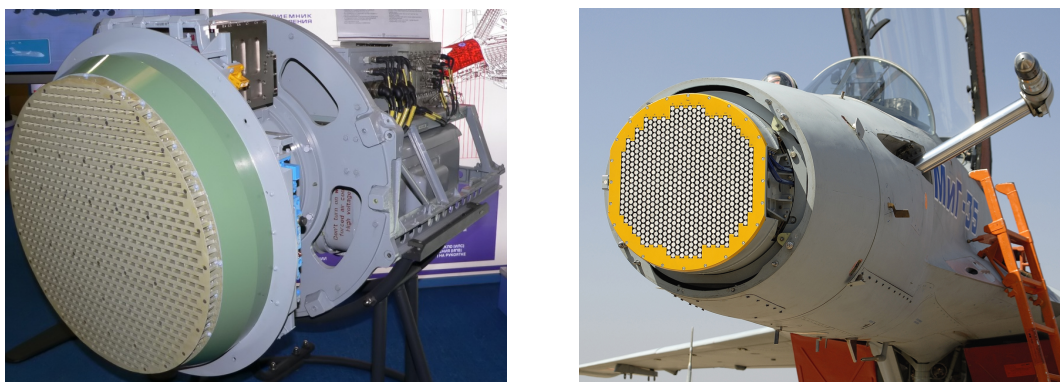


Figure 5.1 – À gauche : le NIIP Bars-29, destiné au MiG-29, est à même de détecter certaines cibles jusqu'à 120 km, d'en suivre jusqu'à 15 de manière simultanée en mode « track-while-scan ». À droite : le nez d'un MiG-35 révélant le Phazotron Zhuk-AE opérant dans la bande X ( $\lambda \simeq 3$  cm) à même de suivre 30 cibles en poursuite et 6 en attaque.

Les sujets abordés dans ce chapitre sont directement reliés à la réalisation d'un élément rayonnant compact de forme parallélépipédique et font suite à plusieurs autres travaux de recherche réalisés lors de thèses [A4, A3, A5] suivies par l'équipe CLARTE de l'Institut Fresnel ainsi que par l'IETR.

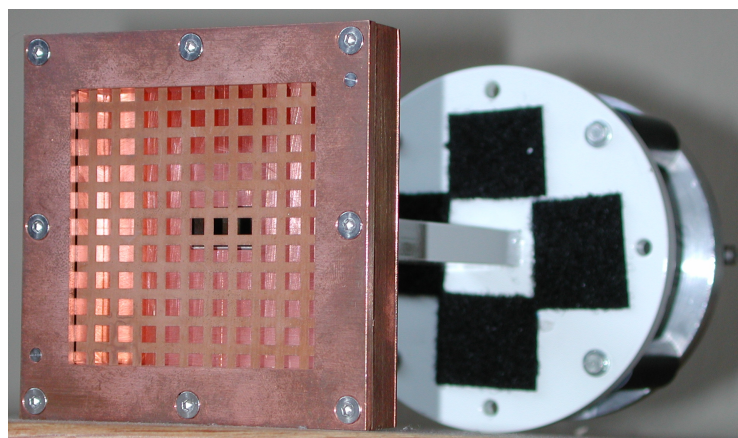


Figure 5.2 – Antenne Fabry-Pérot réalisée en 2004 par l'Institut Fresnel et fonctionnant au voisinage de 14 GHz. Elle est alimentée par un guide de section rectangulaire et ses dimensions sont approximativement  $11 \times 11 \times 1$  cm.

Lors de calculs ultérieurs, plusieurs versions de l'antenne (visible sur la figure 5.2) ont été envisagées [A4, A3, A6] en modifiant les paramètres de la grille de sortie, la nature des parois « latérales » de la cavité ainsi que la nature de l'alimentation de telle sorte que les performances générales (gain, «  $S_{11}$  », polarisation, etc.) de l'antenne soient améliorées.

Parmi ces différents axes de travail, la modification des parois latérales s'avérait d'importance pour pouvoir obtenir une forte efficacité de surface et envisager un fonctionnement bipolarisation. En effet, le fait de substituer les quatre plans métalliques par des surfaces plus complexes à base de réseaux apparaissait prometteur. Les sections qui suivent sont donc dédiées à l'étude de surfaces sélectives en fréquence et à leur intégration en tant que parois latérales dans une structure guidante « test ».

### 5.1.2 Objectifs et méthodologie

En premier lieu, l'objectif est la modification des parois de l'antenne élémentaire de telle sorte que l'efficacité de surface soit maximisée pour deux polarisations linéaires et orthogonales.

Pour une ouverture rectangulaire de dimensions  $a \times b$  faite dans un plan métallique, l'efficacité de surface est maximisée si la distribution de champ est uniforme en amplitude et en polarisation sur l'intégralité de la surface considérée [A7].

Distribution de champ	Uniforme (mode TEM)	Nulle aux bords (mode TE <sub>10</sub> ou TE <sub>01</sub> )
Directivité maximale	$4\pi ab/\lambda^2$	$0.81 \times 4\pi ab/\lambda^2$
Efficacité de surface	1	0.81

Tableau 5.1 – Lien entre distributions de champ et efficacités de surface pour une antenne à ouverture rectangulaire.

Le problème qui se pose est donc de trouver un type de paroi qui fasse que l'antenne tolère un mode entièrement transverse dont amplitude et polarisation soient uniformes sur toute l'ouverture (autrement dit, un mode TEM uniforme). Un mode quasi-TEM admettant en certains endroits un champ longitudinal est aussi une solution convenable pourvu que la zone de non uniformité du mode reste négligeable devant une section de l'antenne.

Si l'on ne considère qu'une seule polarisation (voir figure 5.3), la solution la plus simple pour obtenir une carte de champ uniforme en sortie de ce genre d'antenne est de considérer une cavité dont deux des parois soient *PMC* et les deux autres *PEC* [A8]. Certains calculs effectués par G. Benelli au cours de sa thèse [A3] mettaient en œuvre des surfaces *PEC* et *PMC* de manière simultanée. Ces surfaces n'étaient que des modèles théoriques fonctionnant quelle que soit la fréquence de l'alimentation mais, néanmoins, et après une étude limitée, une amélioration notable du gain a été observée.

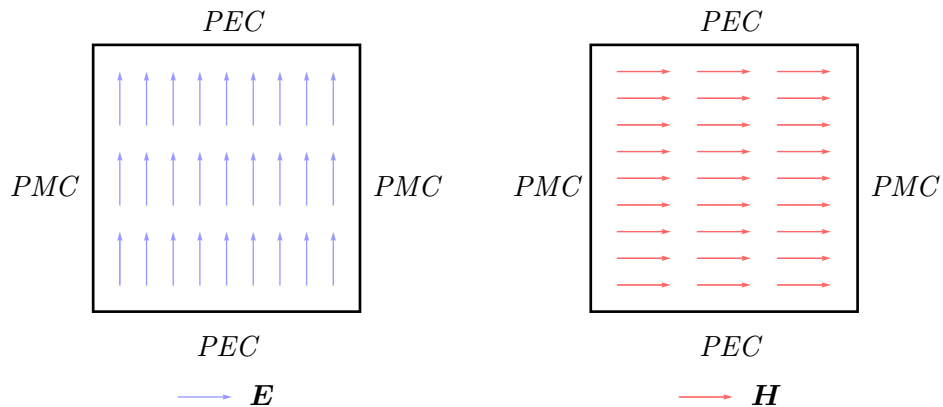


Figure 5.3 – Répartition des champs électrique (à gauche) et magnétique (à droite) dans une section droite de l'antenne à parois PEC-PMC. Mode fondamental uniforme.

Dans toute la suite, nous cherchons et étudions des surfaces réelles qui nous permettent d'approcher au mieux la solution cherchée. On trouve dans la littérature un certain type

de surfaces dites « *hard* » faites à base de structures périodiques et dont le nom est issu de la physique des ondes acoustiques [A9].

Il existe dans la littérature de nombreux travaux portant sur les surfaces *hard* [A10, A11, A12] ainsi que leurs applications potentielles dans le domaine des antennes [A13, A14] et plus particulièrement des ESA [A15, A16]. Bien que P.-S. Kildal ait introduit le concept de *soft/hard surfaces* à la fin des années quatre-vingt, les antennes « corruguées » existent pour le moins depuis les années soixante.

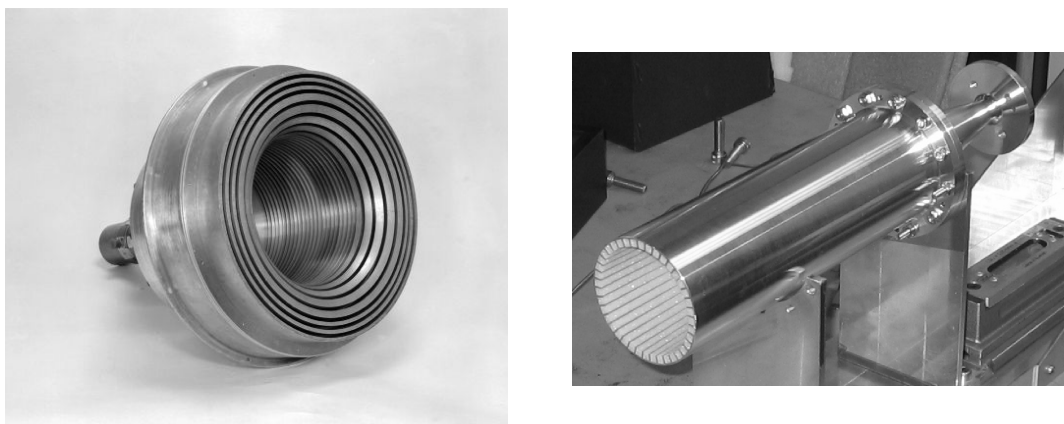


Figure 5.4 – À gauche : une antenne du LM de la mission Apollo 11 (1969) fonctionnant en bande S. Les corrugations sont transversales, la surface est dite « *soft* ». À droite : une antenne bi-bande fonctionnant autour de 20/30 GHz. Les corrugations sont longitudinales, la surface est dite « *hard* ».

Devant la complexité du problème, nous avons tenu à ramener l'étude d'un élément rayonnant compact (problème tridimensionnel avec prise en compte de l'alimentation, des parois et de la grille de sortie) à l'étude d'un guide métallique fermé invariant dans une direction (problème bidimensionnel). Les considérations sur l'alimentation, l'adaptation d'impédance entre l'alimentation et la cavité, la grille de sortie sont des problématiques annexes qui ne rentrent pas directement dans le cadre de cette étude. Certains de ces aspects ont notamment déjà été étudiés lors de travaux antérieurs [A3, A5].

## 5.2 Surfaces compatibles avec la propagation d'un mode quasi-TEM uniforme

### 5.2.1 Guide et parois

La propagation d'un mode dans un guide d'ondes rectangulaire conducteur peut être vue comme une succession d'ondes planes réfléchies sur toute la longueur du guide par deux parois opposées et interférant entre elles ; c'est la « *zigzag path theory* » [E13]. La nature des interférences et, conséquemment, la structure du mode en question sont directement issues des propriétés en réflexion des quatre parois constituant le guide. Dans ce qui suit, celles-ci sont naturellement fonctions de la polarisation de l'onde plane incidente mais aussi de sa fréquence et de son « angle d'incidence ».

Pour un guide donné, un mode quasi-TEM qui s'y propagerait aurait la structure d'une onde plane « tronquée » dont la constante de propagation serait dirigée (dans sa quasi-totalité) suivant l'axe d'invariance de la structure. Si l'on considère ce mode comme étant

la résultante d'interférences entre deux ondes planes, l'angle d'incidence de chaque onde plane approche  $\pi/2$ .

L'étude préliminaire d'un guide sera donc l'étude de la réflexion d'une onde plane sur une surface ouverte et de son comportement en fonction

1. de la polarisation,
2. de la fréquence,
3. de l'angle d'incidence.

Un intérêt tout particulier sera porté au cas de l'**incidence rasante**.

Introduisons les coefficients de réflexion pour les deux cas de polarisation, TE et TM,

$$r_E = \left. \frac{\mathbf{E}^{ref}}{\mathbf{E}^{inc}} \right|_{y_{max}} \quad \text{et} \quad r_H = \left. \frac{\mathbf{H}^{ref}}{\mathbf{H}^{inc}} \right|_{y_{max}}, \quad (5.2.1)$$

où  $y_{max}$  désigne l'altitude de la face supérieure de la surface et  $(\mathbf{E}^{ref}, \mathbf{H}^{ref})$  représente le champ réfléchi ; ainsi que leur phase respective,

$$\varphi_E = \arg(r_E) \quad \text{et} \quad \varphi_H = \arg(r_H). \quad (5.2.2)$$

### 5.2.2 Conditions *PEC* et *PMC*

Les conditions imposées au champ électromagnétique lorsqu'il rencontre l'interface entre un diélectrique et un objet *PMC* sont résumées dans la sous-section 1.3.2 et celles relatives aux objets *PEC* sont bien connues. Contrairement au cas d'une plaque métallique agissant comme un écran *PEC*, il n'existe pas (à notre connaissance) de matériau *PMC* homogène à l'état naturel. Les surfaces *PMC* à suivre seront des surfaces à la fois « épaisses » et composites dont les propriétés — les coefficients de réflexion notamment — seront définis sur leur face « supérieure », c.-à-d. à l'interface entre le support du champ incident et la structure *PMC*.

À la surface, les coefficients de réflexion sont de module unitaire (les surfaces sont opaques et sans pertes) mais leur phase  $\varphi_E$  en polarisation TE et  $\varphi_H$  en polarisation TM varie d'un type de surface à l'autre. Les coefficients de réflexion changent de signe suivant le couple nature-de-la-surface/polarisation.

Type	$r_E$	$\varphi_E$	$r_H$	$\varphi_H$
<i>PEC</i>	-1	$\pm\pi$	+1	0
<i>PMC</i>	+1	0	-1	$\pm\pi$

Tableau 5.2 – Coefficients de réflexion au niveau d'une surface *PEC* et d'une surface *PMC* pour deux cas de polarisation.

Si l'on considère une onde plane polarisée TE se réfléchissant sur une paroi *PEC*, le champ électrique réfléchi est déphasé de  $\pm\pi$  et le champ total est nul à la surface. *A contrario*, un champ électrique TE réfléchi par une paroi *PMC* n'est pas déphasé et le champ total est maximal à la surface. La même situation se retrouve en polarisation TM si l'on intervertit surfaces *PEC* et *PMC*.

Dans le cadre de l'étude de l'antenne, une surface *PMC* comme paroi latérale présente de l'intérêt pour un cas de polarisation si l'on désire avoir un champ maximal « aux bords ».

### 5.2.3 Conditions *soft* et *hard*

Les surfaces *soft* et *hard* [A9, A10] sont des surfaces hybrides combinant certaines propriétés des surfaces *PEC* et d'autres des surfaces *PMC*. De la même manière que le modèle *PMC* est le complémentaire du modèle *PEC*, une surface *hard* est le complémentaire d'une surface *soft*.

Type	$r_E$	$\varphi_E$	$r_H$	$\varphi_H$
<i>soft</i>	-1	$\pm\pi$	-1	$\pm\pi$
<i>hard</i>	+1	0	+1	0

Tableau 5.3 – Coefficients de réflexion au niveau d'une surface *soft* et d'une surface *hard* pour deux cas de polarisation.

Au niveau d'une surface *soft* idéale, le champ total est nul (quelle que soit la polarisation) tandis que, sur une surface *hard*, le champ total est maximal. Cela fait de la surface *hard* le candidat idéal pour chaque paroi de l'élément rayonnant : les champs électrique et magnétique ne s'y annulent pas. Un guide fait de quatre parois *hard* idéales tolère la propagation d'un **mode TEM uniforme pour deux polarisations** orthogonales (contrairement à la configuration *PEC-PMC* qui n'en autorise qu'une).

## 5.3 Étude d'une surface *PMC* ouverte

### 5.3.1 Solution pour une surface *PMC*

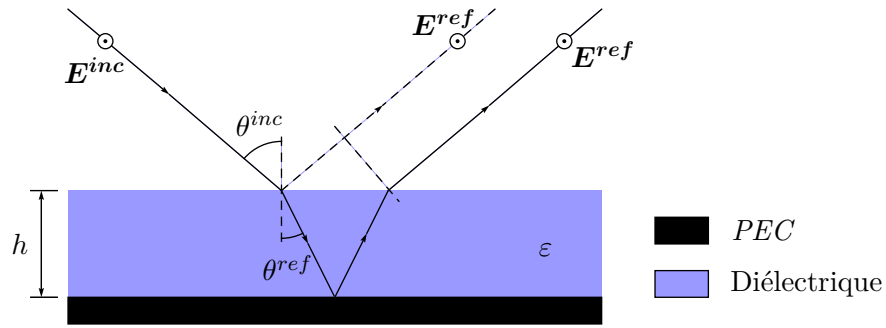
La solution largement employée pour obtenir un effet *PMC* consiste à déposer une fine couche de matériau diélectrique sur un plan de masse. Ce faisant on obtient un « *dielectric grounded slab* ». Nous ne connaissons pas de surfaces composites purement métalliques qui, à la fois, soient exploitables et dont les caractéristiques soient similaires.



Figure 5.5 – Exemple de surface *PMC*.

L'effet *PMC* est présent lorsqu'un champ incident polarisé TE (tel que le champ électrique soit normal au plan d'incidence et donc parallèle à la surface) est rigoureusement en phase avec le champ réfléchi. Le déphasage induit par la lame diélectrique associée au plan *PEC* doit donc être multiple de  $2\pi$ .

Le type de surface présenté sur la figure 5.5 fonctionne en tant que surface *PMC* lorsqu'une certaine relation entre angle d'incidence, longueur d'onde, épaisseur et permittivité de la lame est observée.

Figure 5.6 – Principe de la réflexion sur une surface *PMC*.

Un simple calcul de différences de marche (voir la figure 5.6) entraîne

$$h = \frac{\lambda_0^{inc}}{4\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta^{inc}}}. \quad (5.3.1)$$

Remarquons que pour un angle d'incidence extrême,  $\theta^{inc} = \pm\pi/2$ , une surface de ce type ne peut être *PMC* que si la permittivité de la lame est strictement supérieure à l'unité,  $\varepsilon > 1$ .

Les deux graphes de la figure 5.7 représentent la courbe implicite

$$h - \frac{\lambda_0^{inc}}{4\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta^{inc}}} = 0 \quad (5.3.2)$$

pour différents jeux de données.

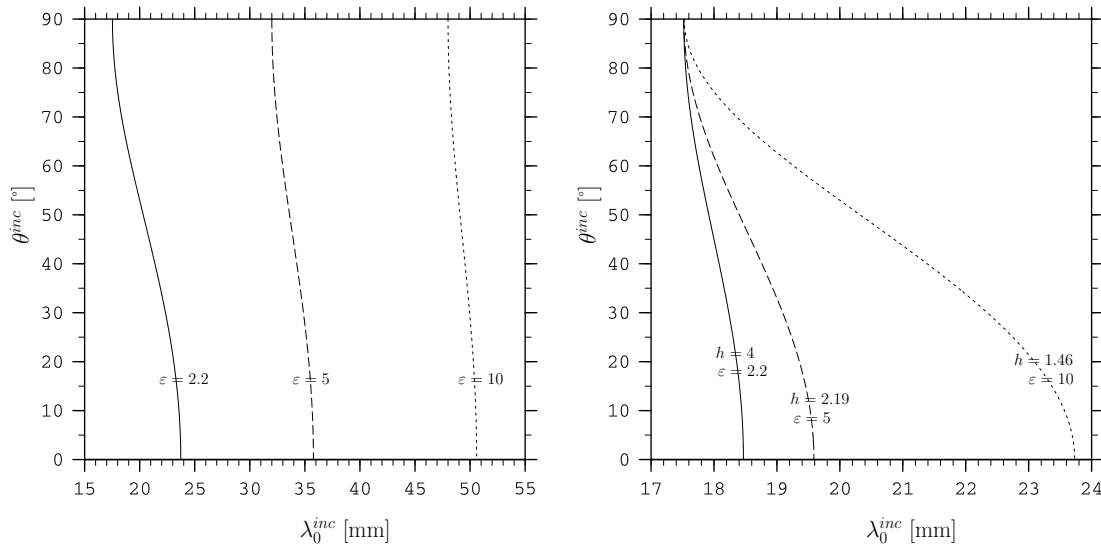


Figure 5.7 – Influence de la valeur de la permittivité de la lame diélectrique à épaisseur constante —  $h = 4$  mm — (à gauche) et de la compacité à longueur d'onde de fonctionnement (en incidence rasante) constante —  $\lambda_0^{inc} \simeq 17.5$  mm — (à droite) sur le comportement d'une surface *PMC*.

Le graphe de gauche nous indique que plus la permittivité croît, plus la dynamique de l'effet *PMC* en fonction de la longueur d'onde diminue. Ceci apparaît comme une qualité



dans la mesure où l'on souhaite une surface la plus stable possible aussi bien en fréquence qu'en angle d'incidence.

*A contrario*, le graphe de droite montre que lorsqu'on gagne en compacité, la dynamique de l'effet *PMC* grandit. Autrement dit, il y a un compromis à trouver entre compacité et performances.

### 5.3.2 Comportement de la phase des coefficients de réflexion

Prenons comme exemple une plaque diélectrique de 4 mm d'épaisseur dont la permittivité vaut 2.2 (correspondant ainsi au matériau commercial RT/duroid 5880). La formule (5.3.1) prévoit une longueur d'onde de fonctionnement de 17.5 mm en incidence rasante. Aussi, il est instructif d'étudier le comportement de la surface autour de cette longueur d'onde.

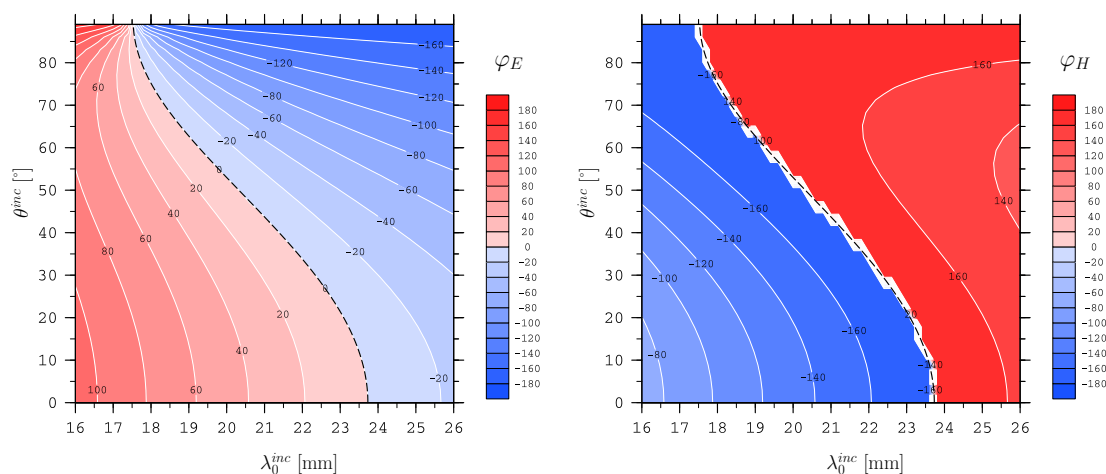


Figure 5.8 – Phase des coefficients de réflexion d'une surface PMC : à gauche,  $\varphi_E$  pour la polarisation TE ; à droite,  $\varphi_H$  pour la polarisation TM. En surimpression (en noir discontinu), la courbe implicite représentative du critère (5.3.2).

La phase des coefficients de réflexion — obtenue à l'aide de la méthode modale [E9] — se conforme au critère (5.3.1) mais, plus on s'éloigne de ce critère, plus le champ électrique réfléchi se déphase. Il apparaît nécessaire de définir une bande passante pour ce type de surfaces car, dans la pratique, l'équation (5.3.1) sera rarement vérifiée pour un champ incident et une surface donnés.

### 5.3.3 Bande passante

Remarquons tout d'abord que, plus l'angle d'incidence croît, plus les « isophases » se resserrent. Si une surface *PMC* est tolérante en incidence normale, la même surface en incidence rasante est extrêmement sélective. À notre sens, cette approche de la bande passante est valide lorsqu'on ne considère qu'une surface ouverte or la finalité de notre étude est l'intégration de ce genre de surfaces dans des guides d'ondes. La bande passante doit être vue comme l'espace de fréquences sur lequel la structure du mode reste proche de celle d'un mode quasi-TEM et ce pour une constante de propagation proche de celle du vide (un indice effectif proche de l'unité). Il semble vraisemblable que, au plus la courbe d'équation 5.3.2 est stable en longueur d'onde — autrement dit, plus sa courbure est faible — au plus l'évolution du mode fondamental est lente et au plus la bande passante est large.

### 5.3.4 Comportement du champ au voisinage d'une surface *PMC*

La figure 5.9 représente le champ électrique total au niveau de la surface dont il a été question jusqu'à présent. Celui-ci comprend le champ incident, une onde plane dont l'amplitude est unitaire, et le champ réfléchi. Le champ incident est polarisé TE,

$$\mathbf{E} = \|\mathbf{E}\| \mathbf{e}_x, \quad (5.3.3)$$

et les conditions d'incidence

$$\lambda_0^{inc} = 17.53 \text{ mm}, \theta^{inc} = 89^\circ, \quad (5.3.4)$$

ont été choisies de telle sorte que le critère (5.3.1) soit vérifié.

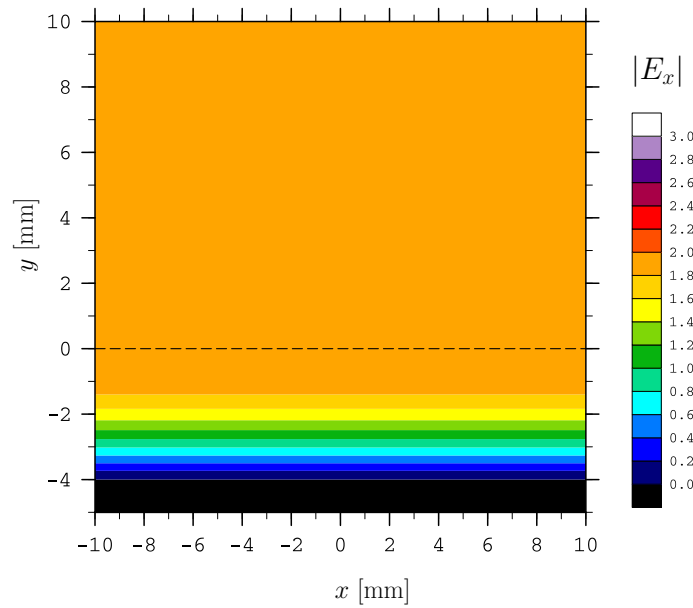


Figure 5.9 – Champ électrique total au voisinage d'une surface *PMC* pour  $\lambda_0^{inc} = 17.53 \text{ mm}$  et  $\theta^{inc} = 89^\circ$ . La lame diélectrique occupe la zone  $-4 < y < 0 \text{ mm}$ .

On constate que le champ électrique vaut 2 — soit la somme des champs incident et réfléchi — au niveau de la face supérieure de la surface, ce qui indique que la surface considérée se comporte bien comme une surface *PMC* pour les conditions d'incidence (5.3.4).

## 5.4 Surfaces *hard*

### 5.4.1 Solutions pour surfaces *hard*

Telles qu'elles existent, les surfaces *hard* sont composites et combinent simultanément éléments *PEC* et éléments *PMC*. Elles se déclinent en deux types :

1. les surfaces « corruguées »,
2. les lignes microrubans.

Les premières comme les secondes sont des réseaux et cela implique un **sens de fonctionnement**. Dans les deux cas, les surfaces fonctionnent en régime *hard* lorsque le plan d'incidence est *parallèle* à la direction d'invariance de la structure [A9]. Par opposition,



elles sont *soft* lorsque le plan d'incidence est *orthogonal* à cette même direction d'invariance [A9]. Seules les surfaces *hard* nous intéressent et, dans tout ce qui suit,

$$\phi^{inc} = \pm\pi/2 \quad (5.4.1)$$

sera sous-entendu (conformément aux conventions angulaires énoncées dans la sous-section 3.5.2).

**Surfaces corruguées** Les surfaces corruguées sont des réseaux lamellaires. Leur période se subdivise en deux parties : l'une *PMC*, l'autre *PEC*.

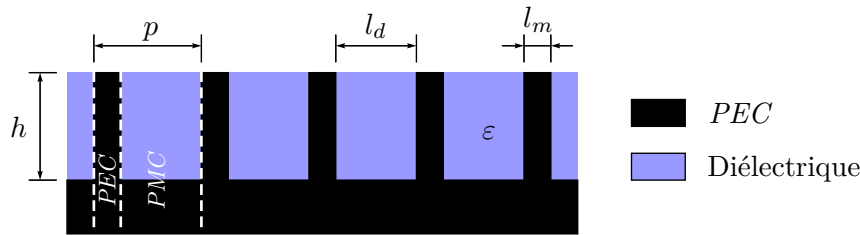


Figure 5.10 – Surface corruguée.

La hauteur du réseau, sa période, la proportion de métal dans une période, etc., fixent les performances de la surface.

**Lignes microrubans** Très proches des surfaces corruguées de par leur constitution, les surfaces à base de lignes microrubans sont un ensemble de pistes déposées sur un *dielectric grounded slab*. La principale différence entre les deux types de surface vient du fait que la partie métallique est, dans ce cas, déconnectée du plan de masse. Ceci laisse aux lignes de champ magnétique la liberté de s'enrouler autour des pistes.

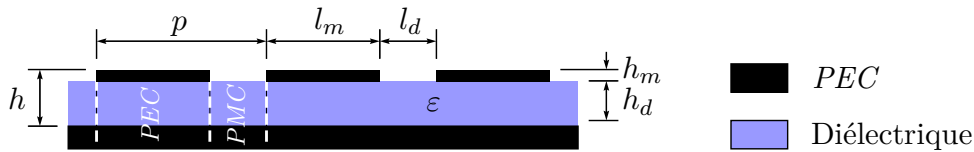


Figure 5.11 – Lignes microrubans.

## 5.4.2 Étude de surfaces corruguées

### Surface à faible permittivité

Considérons une surface corruguée dont les paramètres  $h$  et  $\varepsilon$  sont identiques à ceux de la surface *PMC* étudiée précédemment dans la sous-section 5.3.2, à savoir  $h = 4$  mm et  $\varepsilon = 2.2$ . Les autres données —  $p$ ,  $l_d$  et  $l_m$  — n'intervenant pas dans la relation (5.3.1), elles sont choisies de manière arbitraire pourvu que

$$p \ll \lambda_0^{inc}. \quad (5.4.2)$$

Ici, la période vaut  $p = 10$  mm, les « dents » métalliques sont larges de  $l_m = 2.6$  mm et conséquemment,  $l_d = 7.4$  mm. Le comportement d'une telle surface doit, par certains aspects, être similaire à celui de la surface *PMC* précédente.

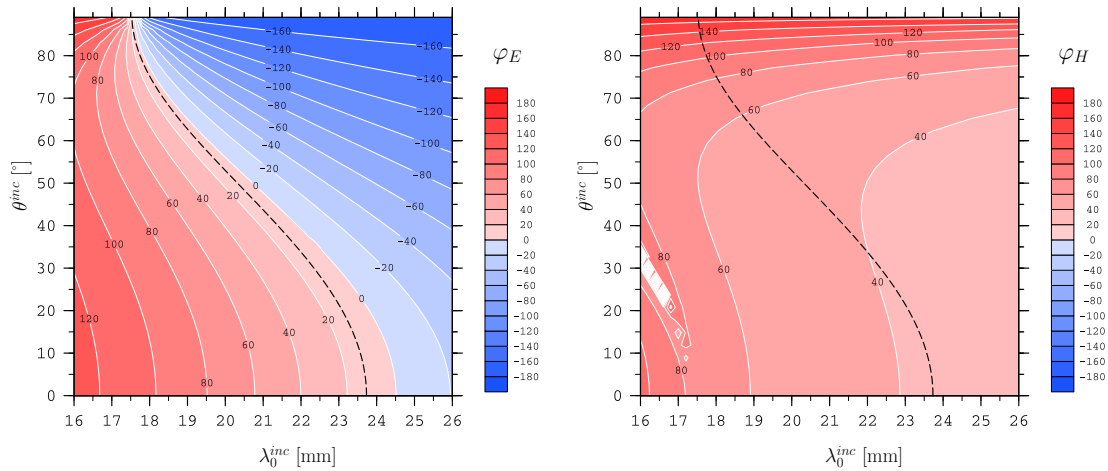


Figure 5.12 – Phase des coefficients de réflexion d’une surface corruguée. En surimpression (en noir discontinu), la courbe implicite représentative du critère (5.3.2).

Il faut voir une surface *hard* comme une surface *PMC* pour le champ électrique tangent et comme une surface *PEC* pour le champ magnétique tangent ; cela de manière *simultanée*. Si le premier graphe de la figure 5.12 nous conforte quant au comportement *PMC* de la surface — l’allure de l’isophas  $\varphi_E = 0$  est très similaire à celle de la courbe gouvernée par (5.3.2) — le second graphe nous montre que son comportement *PEC* est médiocre. En effet,

1. bien que basse pour des incidences proches de la normale, la phase du coefficient de réflexion en polarisation TM ( $\varphi_H$ ) ne s’annule pas en même temps que celle du coefficient de réflexion en polarisation TE ( $\varphi_E$ ) ;
2.  $\varphi_H$  tend vers  $\pi$ , c.-à-d.  $r_H$  tend vers -1, lorsque l’angle d’incidence croît. Ce réseau se comporte au mieux comme une surface *PMC* et non pas *hard* au voisinage de l’incidence rasante.

**Comportement en fréquence** La figure 5.13 représente la phase des coefficients de réflexion de la surface actuelle pour des longueurs d’onde légèrement plus basses.

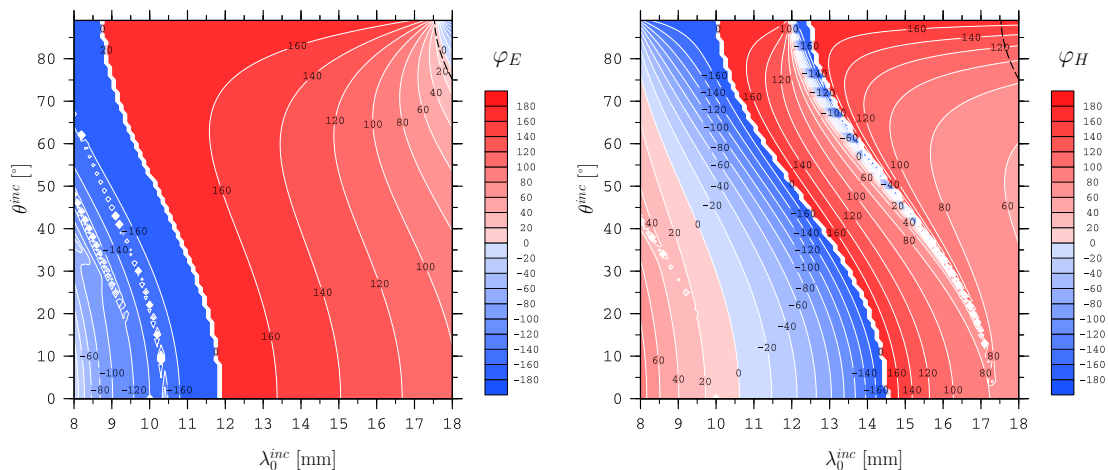


Figure 5.13 – Phase des coefficients de réflexion d’une surface corruguée pour des fréquences plus élevées. En surimpression (en noir discontinu), la courbe implicite représentative du critère (5.3.2).

On s'aperçoit que la nature de la surface varie énormément suivant la plage de longueurs d'onde envisagée. Typiquement,

- pour  $10 \lesssim \lambda_0^{inc} \lesssim 14.5$  mm, les corrugations agissent comme une surface *soft*,

$$\varphi_E \simeq \pi \text{ et } |\varphi_H| \simeq \pi, \quad (5.4.3)$$

- pour  $7.5 \lesssim \lambda_0^{inc} \lesssim 10.5$  mm, ces mêmes corrugations agissent comme une surface *PEC*,

$$\varphi_E \simeq -\pi \text{ et } \varphi_H \simeq 0. \quad (5.4.4)$$

Cela remet partiellement en question l'approche de P.-S. Kildal selon laquelle une surface est *hard* lorsque les corrugations sont longitudinales, parallèles au plan d'incidence. Il existe visiblement des plages de fréquences sur lesquelles une surface corruguée longitudinalement se comporte globalement comme une surface *soft*.

Si le critère (5.3.1) permet de prévoir la première zone de fonctionnement (lorsque le déphasage du champ électrique après réflexion vaut rigoureusement zéro), d'autres comportements *hard* sont aussi à envisager pour des fréquences plus élevées (lorsque  $\varphi_{E/H} = 2\pi, 4\pi, 6\pi$ , etc.).

La figure 5.14 représente la phase des coefficients de réflexion de la surface actuelle pour des longueurs d'onde très grandes devant la période du réseau.

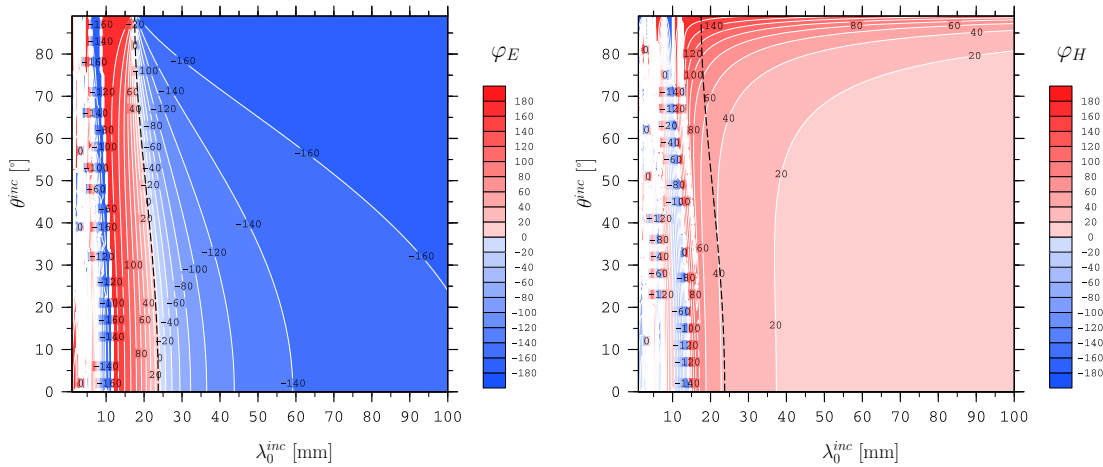


Figure 5.14 – Phase des coefficients de réflexion d'une surface corruguée aux grandes longueurs d'onde. En surimpression (en noir discontinu), la courbe implicite représentative du critère (5.3.2).

Plus la longueur d'onde augmente, plus la surface se comporte comme un plan infiniment conducteur. L'épaisseur optique  $\sqrt{\epsilon}h$  de la surface impose une longueur d'onde maximale pour observer un effet *hard* et rien de particulier n'est à attendre au-delà de 25 mm.

**Surface effective** Si l'on se réfère à la figure 5.12, les conditions d'incidence

$$\lambda_0^{inc} = 17.6 \text{ mm}, \theta^{inc} = 89^\circ, \quad (5.4.5)$$

assurent un comportement *PMC* à la surface. Les deux graphes de la figure 5.15 représentent le champ total projeté sur l'axe  $x$ .

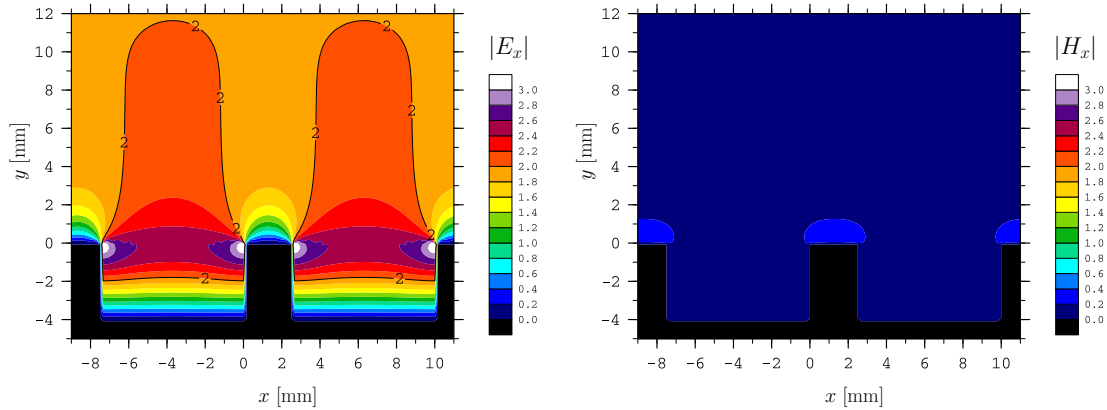


Figure 5.15 – À gauche, le champ électrique total lors de la réflexion d’une onde plane polarisée TE. À droite, le champ magnétique total lors de la réflexion d’une onde plane polarisée TM. Conditions d’incidence :  $\lambda_0^{inc} = 17.6$  mm,  $\theta^{inc} = 89^\circ$ .

La forme du champ au voisinage du réseau est celle attendue. Pour une surface *PMC*,  $r_E = +1$  et  $r_H = -1$ , le champ électrique tangent à la surface tend vers 2 — soit la somme des champs incident et réfléchi — tandis que le champ magnétique s’annule.

On remarque que les dents métalliques provoquent de fortes variations de champ aux angles. La zone d’uniformité du champ se trouve au-dessus de la surface et non pas directement sur la face supérieure du réseau. L’épaisseur effective de la surface n’est donc pas son épaisseur physique mais celle-ci à laquelle on additionne une épaisseur de vide. L’épaisseur effective est un paramètre crucial dans le cadre d’un ESA : plus celle-ci croît, plus la surface utile de l’ESA diminue. Dans ce cas précis, il faut attendre une hauteur de 3 mm pour voir le module du champ électrique se stabiliser autour de 2. L’épaisseur effective de la surface est alors de 7 mm et non pas de 4 mm.

**Influence de la proportion de métal** Dans le but d’augmenter la surface utile de l’ESA, il peut être avantageux de considérer une surface corruguée qui soit commune à deux antennes voisines. Pour ce faire, il faut que la paroi soit « réversible » et que la face inférieure du réseau soit identique à la face supérieure, c.-à-d.  $l_m = l_d = p/2$ .

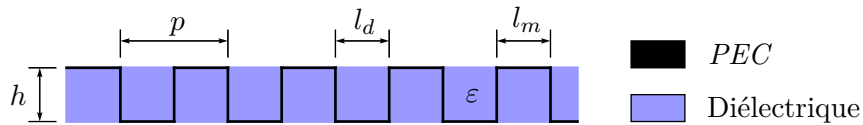


Figure 5.16 – Surface corruguée réversible où  $l_m = l_d = p/2$ .

La surface dont il est question dans les deux figures à suivre hérite des paramètres ( $p$ ,  $h$  et  $\varepsilon$ ) de la précédente hormis  $l_m$  et  $l_d$  valant 5 mm désormais.

Le comportement de la phase des coefficients de réflexion (voir figure 5.17) change peu. La proportion de métal dans une période, passant de 26 à 50 %, influe peu sur les caractéristiques fréquentielles de la surface.

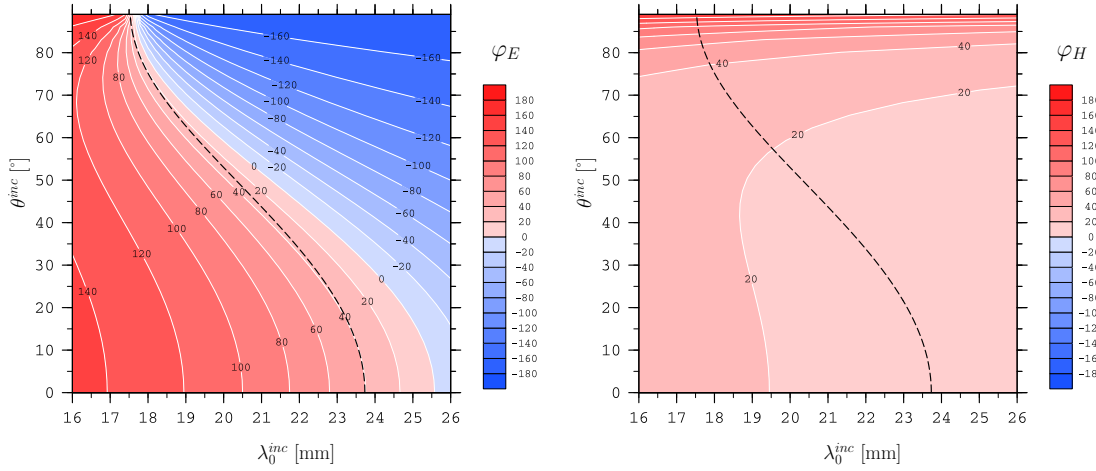


Figure 5.17 – Phase des coefficients de réflexion d'une surface corruguée « réversible ». En surimpression (en noir discontinu), la courbe implicite représentative du critère (5.3.2).

Le champ électrique est lui aussi très semblable à ce qui a été vu précédemment. La figure 5.18 indique cependant que l'épaisseur effective est quelque peu supérieure : 9 mm. Le module du champ électrique total approche 2 en moyenne 5 mm au-dessus du réseau.

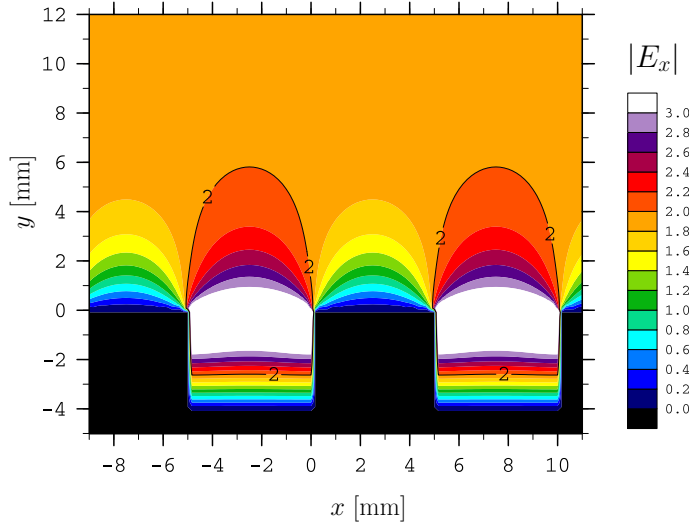


Figure 5.18 – Le champ électrique total lors de la réflexion d'une onde plane polarisée TE. Conditions d'incidence :  $\lambda_0^{inc} = 17.64$  mm,  $\theta^{inc} = 89^\circ$ .

### Surface à permittivité élevée

La relation (5.3.1) nous indique un moyen simple pour augmenter la compacité d'une surface corruguée. Pour diminuer l'épaisseur  $h$ , il faut augmenter la permittivité  $\varepsilon$  des lamelles diélectriques. Reprenons les valeurs de la première surface pour  $l_m$ ,  $l_d$  et  $p$ ; choisissons une nouvelle valeur pour  $h$  et  $\varepsilon$  de telle sorte que la fréquence de fonctionnement en incidence rasante soit conservée :  $h = 1.46$  mm et  $\varepsilon = 10$ .

L'évolution de la phase des coefficients de réflexion est donnée par la figure 5.19.

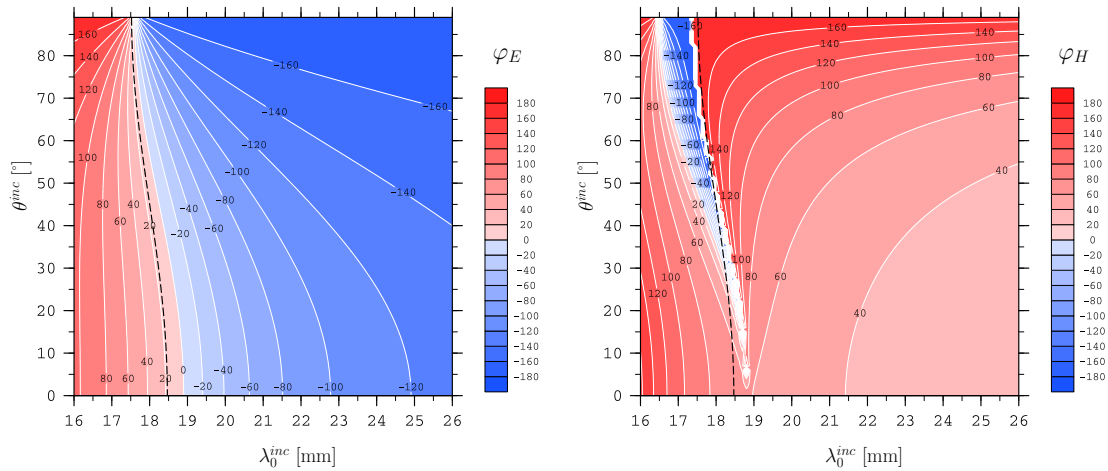


Figure 5.19 – Phase des coefficients de réflexion d’une surface corruguée à permittivité élevée. En surimpression (en noir discontinu), la courbe implicite représentative du critère (5.3.2).

De nouveau, la surface se comporte au mieux comme une surface *PMC* au niveau de la longueur d’onde de fonctionnement et en incidence rasante.

On observe, conformément à la figure 5.7, que les isophases se resserrent autour de la courbe discontinue. Néanmoins, la stabilité de l’effet *PMC* en fonction de la longueur d’onde est très bonne. La courbe discontinue (sous-entendu le critère 5.3.2) balaie environ « 1 mm de longueur d’onde » en parcourant tous les angles d’incidence possibles.

La figure 5.20 illustre l’influence de la valeur de la permittivité sur le comportement des coefficients de réflexion. Les trois jeux de paramètres sont choisis de telle sorte que la longueur d’onde de fonctionnement en incidence rasante soit la même pour chaque échantillon.

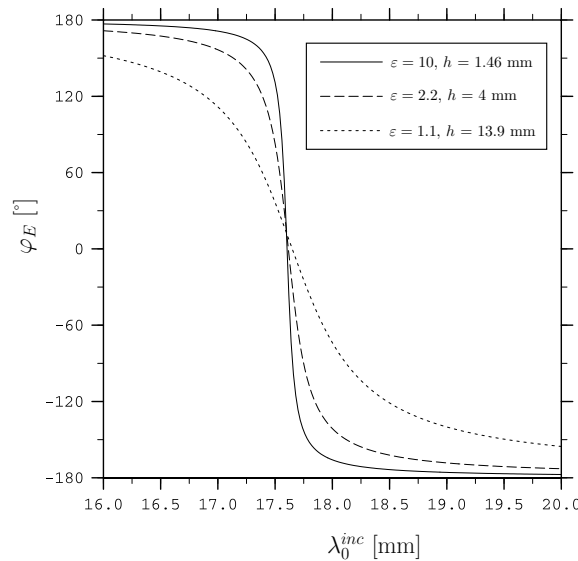


Figure 5.20 – Impact de la compacité d’une surface sur un coefficient de réflexion pris à l’incidence rasante ( $\theta^{\text{inc}} = 89^\circ$ ).

Plus une surface est compacte, plus la phase des coefficients de réflexion change de

signe rapidement, plus la zone de fonctionnement devient étroite.

### 5.4.3 Étude de surfaces à base de lignes microrubans

Dans la section 5.4.1, nous avons référencé les deux types de surface à même de faire office de surfaces *hard*. Nous avons précédemment exploré le cas des surfaces corruguées ; nous nous attachons maintenant à décrire quelques aspects des lignes microrubans dont la structure est présentée sur la figure 5.11.

Afin de pouvoir comparer les lignes microrubans aux corrugations, nous avons à nouveau choisi un jeu de données qui conserve la longueur d'onde de fonctionnement en incidence rasante. La structure analysée par la suite a pour dimensions

$$h_d = 0.8 \text{ mm}, h_m = 30 \text{ } \mu\text{m}, l_m = 7.4 \text{ mm}, p = 10 \text{ mm et } \varepsilon = 2.2. \quad (5.4.6)$$

**Phase des coefficients de réflexion** Bien que le critère (5.3.1) ne soit pas directement applicable à ce type de surface, il n'en reste pas moins un référentiel. De plus, on constate *a posteriori* que l'isophase nulle pour le coefficient de réflexion en polarisation TE — le facteur limitant pour les lignes microrubans — reste constamment au voisinage de la courbe implicite (5.3.2) induite par (5.3.1). En conséquence, une courbe noire discontinue apparaîtra également sur les cartes de phase à suivre.

La figure 5.21 qui retrace l'évolution de  $\varphi_E$  et de  $\varphi_H$  autour d'une longueur d'onde de fonctionnement de la surface considérée indique un comportement très similaire aux corrugations en ce qui concerne la réflexion en polarisation TE.

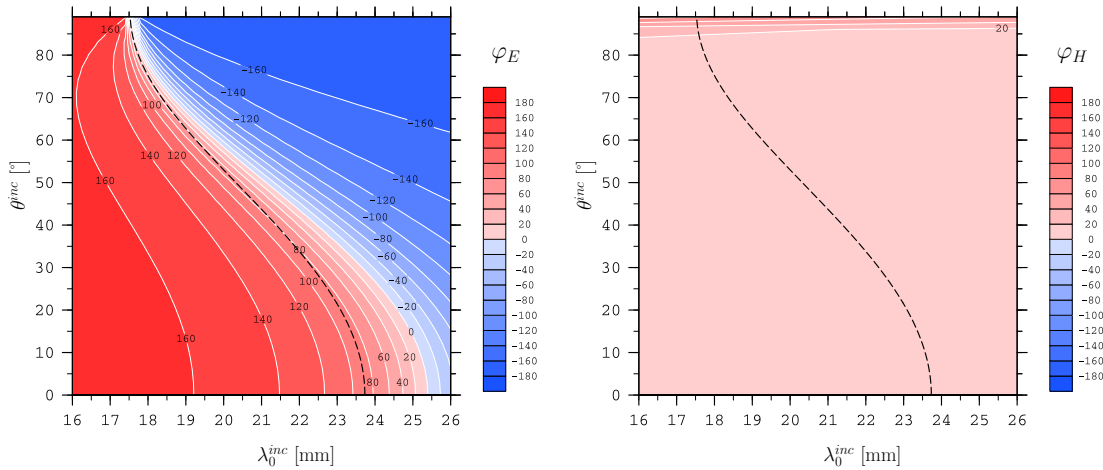


Figure 5.21 – Phase des coefficients de réflexion d'une surface à base de lignes microrubans. En surimpression (en noir discontinu), la courbe implicite représentative du critère (5.3.2).

Les isophases pour  $\varphi_E$  sont relativement resserrées et la dynamique étendue (de 17.5 à 25.5 mm environ). Cependant, contrairement aux surfaces corruguées,  $\varphi_H$  est très stable sur un large éventail de longueurs d'onde et d'angles d'incidence tout en restant proche de zéro. Bien que cette qualité disparaisse en tendant vers l'incidence rasante, le déphasage subi par le champ magnétique en polarisation TM reste raisonnable pour  $\theta^{inc}$  proche de  $\pi/2$ .

**Le champ au voisinage de la structure**  $\varphi_H$  est suffisamment basse et constante pour que cette surface soit *hard* partout où  $\varphi_E$  s'annule. Considérons par exemple une longueur

d'onde de 17.58 mm et un angle d'incidence de  $89^\circ$  pour lesquels  $\varphi_E = 0$ .

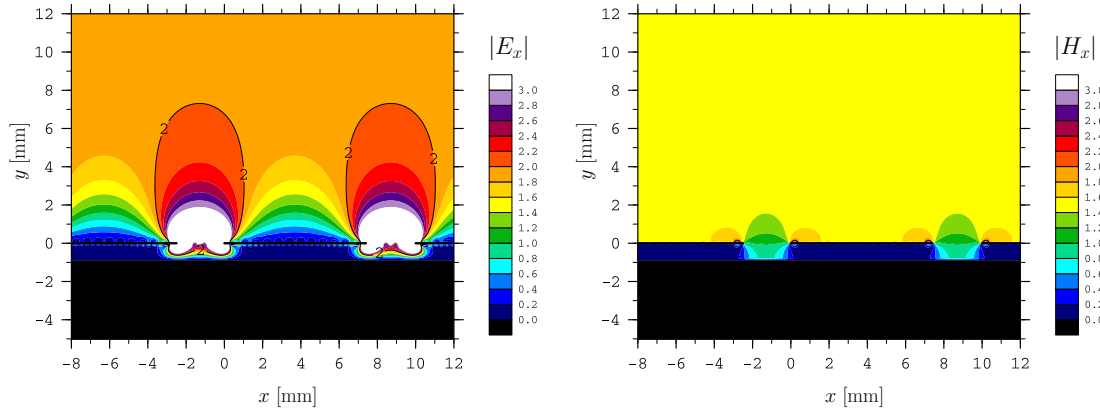


Figure 5.22 – À gauche, le champ électrique total lors de la réflexion d'une onde plane polarisée TE. À droite, le champ magnétique total lors de la réflexion d'une onde plane polarisée TM. Conditions d'incidence :  $\lambda_0^{inc} = 17.58$  mm,  $\theta^{inc} = 89^\circ$ .

Le comportement du champ électrique au-dessus de la structure est très similaire à celui observé dans le cas des corrugations (voir figures 5.15 et 5.18) : très fort au voisinage des parties métalliques discontinues il s'équilibre à partir d'une distance de quelques millimètres. Dans ce cas précis, le champ électrique se stabilise environ 5 mm au-dessus des lignes microrubans. L'épaisseur effective de la structure vaut approximativement 5.8 mm soit un tiers de longueur d'onde.

Pour ce qui est du champ magnétique, les pistes métalliques lui sont « favorables » et limitent les perturbations ; il est presque uniforme dès l'interface entre lignes microrubans et superstrat. On constate également que, bien qu'il en soit proche, son module ne vaut pas 2. En effet,  $\varphi_H$  ne s'annulant pas dans ces conditions d'incidence, une légère dépolarisation du champ se produit à la réflexion et détériore l'effet *hard* désiré.

#### 5.4.4 Conclusions

L'analyse numérique de quelques surfaces *hard* nous permet d'ajouter quelques conclusions à ce qui apparaît déjà dans la littérature.

1. Les conditions aux limites *hard* ne sont pas réalisées sur la face supérieure même de ces surfaces mais bien au-dessus en raison d'un champ évanescent à la fois très fort et très perturbé au voisinage des lames métalliques. La prise en compte de cette notion d'épaisseur effective est primordiale lorsque ces structures sont à intégrer dans des guides d'ondes ou des antennes.
2. Les performances de ce type de surfaces doivent être envisagées en termes de champ lointain — la phase des coefficients de réflexion — et de champ évanescent — l'épaisseur effective de la structure. Nous avons vu précédemment que ces caractéristiques variaient considérablement d'un jeu de paramètres à un autre. Si les effets d'un changement de hauteur d'une structure ou de permittivité des lamelles diélectriques sont plutôt intuitifs, il n'en est pas de même concernant la période ou la part de métal au sein de cette période. À notre connaissance, rien de précis n'a été dit à ce sujet et quelques étapes d'optimisation de structures mériteraient d'être menées.
3. Il apparaît que les surfaces à base de lignes microrubans sont de bien meilleures candidates que les surfaces corruguées pour la réalisation de surfaces *hard*. La phase de



leurs coefficients de réflexion évolue de manière bien plus favorable : là où une surface corruguée sera éventuellement *hard* pour des incidences proches de la normale, les lignes microrubans présentent constamment un couple  $(\lambda_0^{inc}, \theta^{inc})$  pour lequel les conditions souhaitées pour les champs électrique et magnétique sont réunies.

On peut néanmoins leur reprocher une trop grande instabilité sur un large éventail d'incidences. Cela peut s'avérer problématique lorsque de telles surfaces sont utilisées comme réflecteurs plans. Dans notre cas, ceci n'est pas de première importance dans la mesure où seules les incidences rasantes nous intéressent.

Elles sont notamment plus faciles à fabriquer et plus compactes physiquement aussi bien qu'électromagnétiquement.

## 5.5 Approche simplifiée de la relation de dispersion d'un guide *hard*

### 5.5.1 Zigzag path theory

#### Relation de dispersion

La « *zigzag path theory* » nous offre un moyen très simple de remonter à la relation de dispersion d'un guide rectangulaire dont on connaît les propriétés des parois. Pour obtenir la relation qui nous sera utile pour la suite, il est suffisant de ne considérer qu'un guide ouvert : deux plaques parallèles entre elles séparées par une distance  $l_y$ .

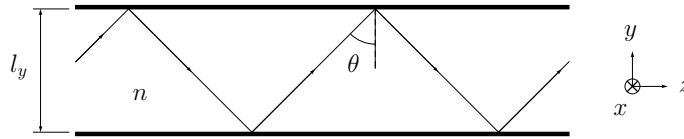


Figure 5.23 – Interprétation de la propagation d'un mode guidé par la théorie du zigzag.

Au sens de la *zigzag path theory*, un mode existe si le déphasage  $\Delta\varphi$  entre deux « rayons » successifs est un multiple de  $2\pi$ , soit

$$\Delta\varphi = 2m\pi, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (5.5.1)$$

Soit  $\delta(\theta)$  la différence de marche entre deux parcours consécutifs. On la définit par

$$\delta(\theta) = 2nl_y \cos \theta, \quad (5.5.2)$$

où  $n$  est l'indice optique du milieu séparant les plaques.

L'expression (5.5.1) du déphasage entre deux rayons successifs fait nécessairement intervenir les déphasages à la réflexion sur chacune des parois du guide. Ceux-ci sont fonctions de la polarisation du champ mais nous ne considérerons que le cas de la polarisation TE<sup>1</sup>.

En polarisation TE, c.-à-d. le champ électrique perpendiculaire au plan de la figure 5.23, la relation (5.5.1) devient

$$\frac{2\pi\delta(\theta)}{\lambda} + 2\varphi_E(\lambda, \theta) = 2m\pi, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (5.5.3)$$

<sup>1</sup>Pour un guide dont les quatre parois sont *hard*, on peut toujours se ramener à un cas de polarisation TE en passant d'un couple de parois à l'autre.

En substituant la différence de marche  $\delta(\theta)$  par son expression (5.5.2), une équation implicite ressort immédiatement,

$$2\pi n l_y \cos \theta + [\varphi_E(\lambda, \theta) - m\pi]\lambda = 0, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (5.5.4)$$

Cette équation donne la courbe de dispersion du  $m$ -ième mode TE se propageant dans le guide.

**Remarque** L'approche de la *zigzag path theory* implique que la relation de dispersion du guide soit exprimée dans le système de variables  $(\lambda, \theta)$ . Ce système est naturellement un équivalent du système  $(\omega, k_z)$  usuel et l'un comme l'autre seront utilisés dans des figures ultérieures.

### Cas particulier de l'incidence rasante

La carte de champ du mode quasi-TEM uniforme susceptible de se propager dans la structure est optimale lorsque  $k_z = k_0$  soit, en terme de *zigzag path theory*,  $\theta = \pi/2$ . Reprenons l'équation (5.5.4) pour cette valeur de  $\theta$ . Elle devient

$$[\varphi_E(\lambda, \pi/2) - m\pi]\lambda = 0, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (5.5.5)$$

Il est important de remarquer que, pour  $k_z = k_0$ , les solutions existent indépendamment de la distance qui sépare les plaques.

Cette dernière équation se sépare en deux cas.

1. Pour  $m$  pair,

$$\varphi_E(\lambda, \pi/2) = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (5.5.6)$$

Dans cette configuration, la surface se comporte comme une surface *hard*. Chaque passage de  $\varphi_E$  par 0 modulo  $2\pi$  implique une solution quasi-TEM uniforme dans le guide correspondant.

2. Pour  $m$  impair,

$$\varphi_E(\lambda, \pi/2) = (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (5.5.7)$$

Dans cette configuration, la surface se comporte comme un plan infiniment conducteur vis-à-vis du champ électrique, celui-ci est nul au voisinage de la surface.

### 5.5.2 Guide *hard-PEC*

Soit un guide rectangulaire dont deux parois opposées sont *hard* et les deux autres *PEC*.

#### Surface

Les surfaces *hard* mises en œuvre sont des surfaces à base de microrubans dont les différents paramètres sont

$$h_d = 0.25, h_m \simeq 0, l_m = 0.2, p = 0.3 \text{ et } \varepsilon = 5. \quad (5.5.8)$$

En considérant l'incidence rasante, les deux premières longueurs d'onde de fonctionnement de cette surface sont approximativement  $\lambda_0^{inc} = 0.83$  et  $\lambda_0^{inc} = 2.5$ .

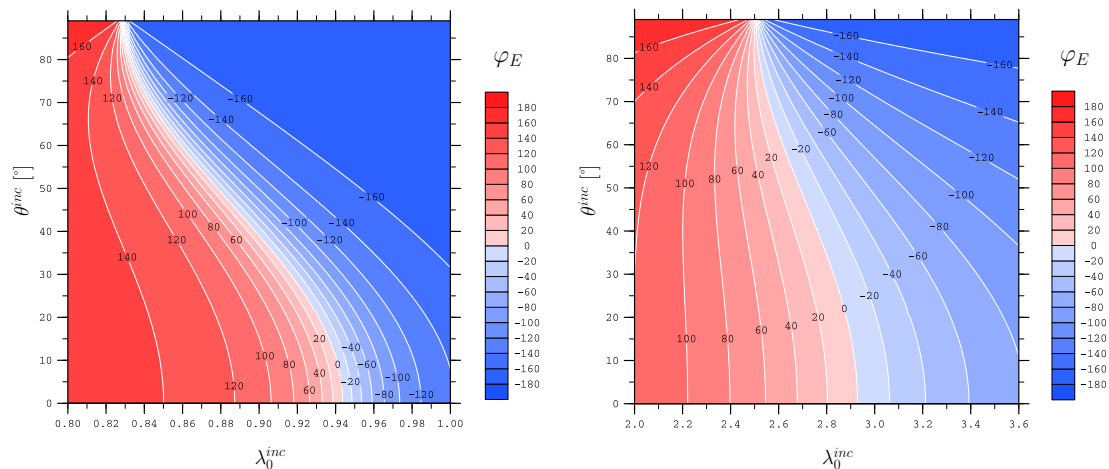


Figure 5.24 – Phase du coefficient de réflexion en polarisation TE de la surface dont sont extraites les parois hard du guide. Deux intervalles de longueurs d'onde sont explorés.

### Guide

Le cœur est vide et ses dimensions sont  $l_x = l_y = 1$ . Nous ne sommes plus dans le cas de surfaces ouvertes pour lequel le nombre de périodes simulé est infini. Ici, les deux parois *hard* du guide se résument à trois périodes (voir le schéma de la figure 5.25, à gauche).

La relation de dispersion d'un tel guide peut être approchée par la méthode des sources fictives dont il est question dans la section 4.2.

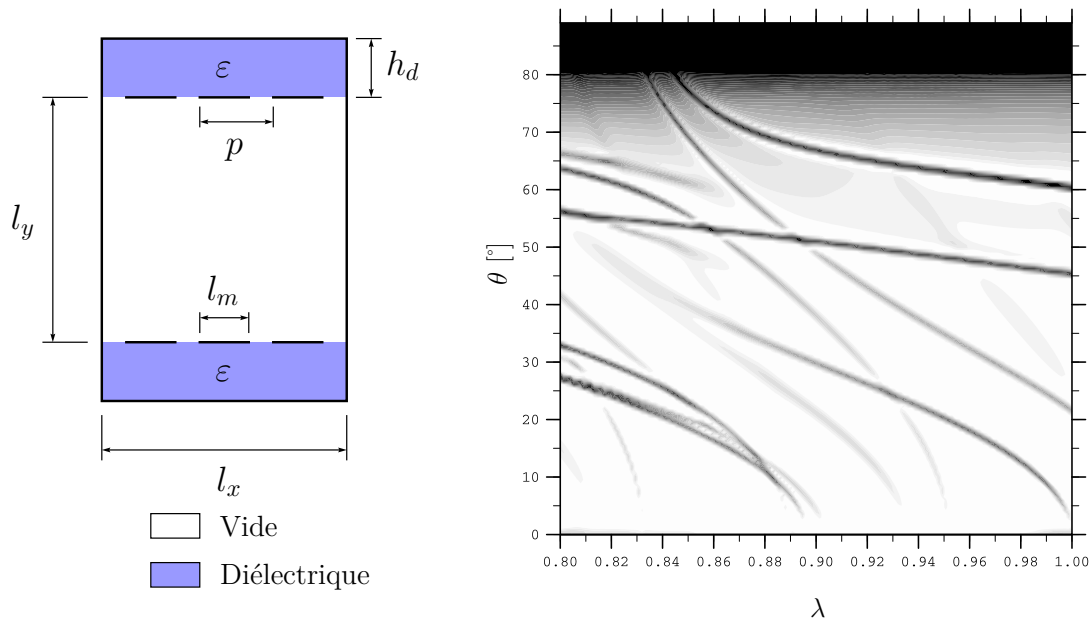


Figure 5.25 – Dispersion du guide hard-PEC obtenue par la méthode des sources fictives.

La signature des modes pouvant se propager dans cette structure est visible en niveaux de gris sur le graphe de la figure 5.25. Le bandeau sombre dans la partie supérieure de ce graphe est due à l'instabilité de la méthode aux grandes incidences (le conditionnement de la matrice système croît).

La netteté toute relative des courbes de dispersion nous fait toucher du doigt la princi-

pale limitation de la méthode des sources fictives : le piqué de ces courbes est fonction de la position des sources, des points de discrétisation, etc. De plus, les fonctions de Hankel — singulières en  $\theta = \pi/2$  — ne sont sans doute pas les fonctions de base les plus adaptées pour la recherche de modes autour de  $k_z = k_0$ .

La *zigzag path theory* permet, dans le cas de guides *hard*, de détecter les modes se propageant entre deux plaques **sans limites de bord** (la section du guide n'est pas limitée dans la direction de l'axe  $x$ ). On s'attend à ce que les courbes de dispersion des modes de ce guide ouvert soient très proches de celles d'un guide fermé par deux parois *PEC* et dont les parois *hard* ne sont constituées que d'un nombre fini de périodes.

Il faut dans un premier temps calculer (par la méthode modale) la phase du coefficient de réflexion en polarisation TE autour de la longueur d'onde de fonctionnement de la surface en question puis l'injecter dans l'équation implicite (5.5.4).

La phase  $\varphi_E$  propre à la surface **infinie** dont les paramètres sont résumés en (5.5.8) est représentée sur la figure 5.24. Lorsqu'on applique la relation (5.5.4) à cette dernière carte pour  $m$  allant de 0 à 3, on obtient un ensemble de quatre courbes représentées sur la figure 5.26, à droite.

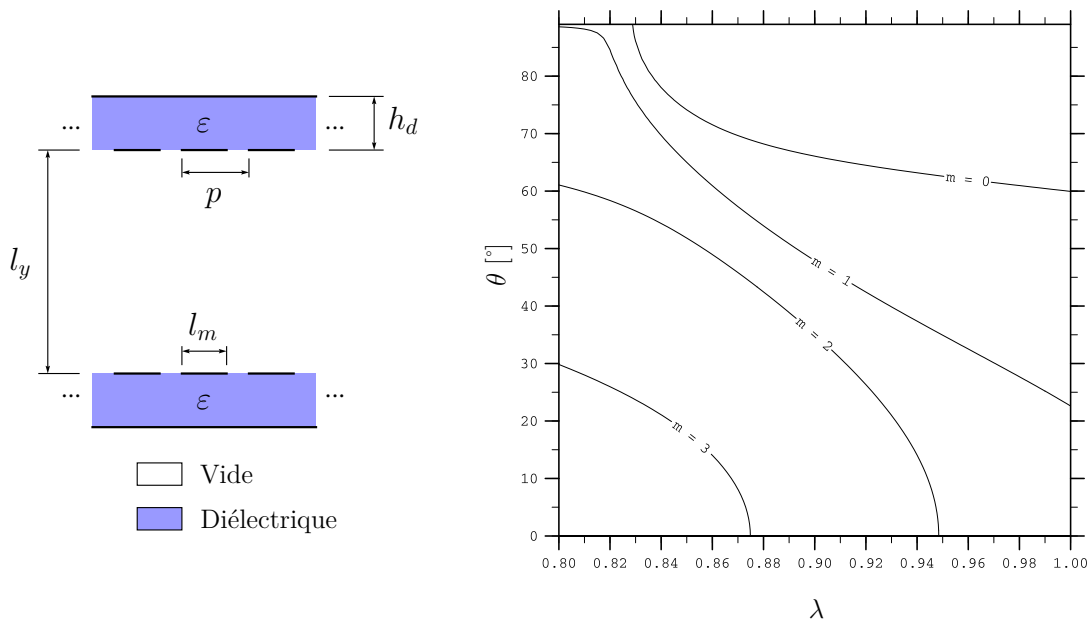


Figure 5.26 – Dispersion des quatre premiers modes TE se propageant dans un guide *hard* ouvert.

La figure 5.27 est une superposition des graphes présents au niveau des figures 5.25 et 5.26. Les résultats issus de la théorie du zigzag et de la méthode des sources fictives sont similaires. Nous pensons à plusieurs explications concernant les écarts entre les deux approches.

1. La méthode des sources fictives est, pour ce type de guide, peu précise.
2. La théorie du zigzag suppose le rebond d'ondes planes entre deux réseaux lamellaires infinis suivant la direction  $x$  ; le fait que les deux surfaces *hard* du guide clos ne soient constituées que de trois périodes laisse penser que la phase de leur coefficient de réflexion en polarisation TE est quelque peu différente de celle de la surface infinie correspondante.

Néanmoins, la théorie du zigzag reste une bonne approximation pour prévoir la dispersion de modes dans un guide *hard* fermé pourvu que le nombre de périodes par parois soit grand devant la longueur d'onde de fonctionnement.

Bien que peu adaptée à la configuration (structure et conditions d'étude), la méthode des sources fictives montre une bonne concordance avec les modes fondamentaux prévus par la théorie du zigzag et permet de montrer les limites de celle-ci lorsque le nombre de pistes par face est faible.

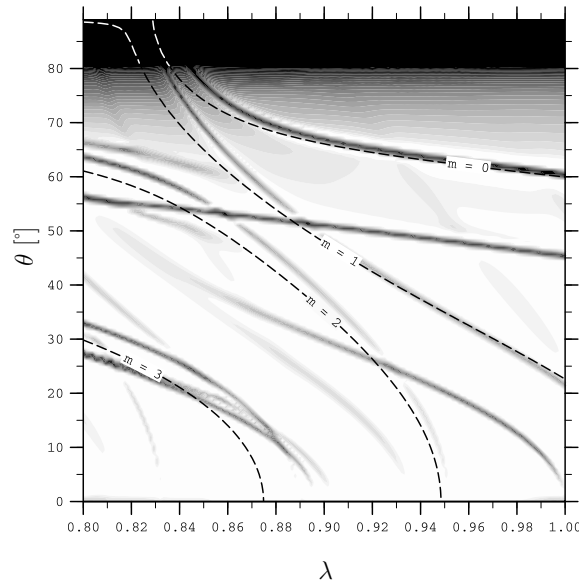


Figure 5.27 – Adéquation entre méthode des sources fictives et zigzag path theory.

Elle aura aussi permis de révéler (figure 5.27) l'existence d'un certain nombre de modes non-prévisibles par la théorie du zigzag en raison de la présence des deux autres parois dans la situation d'un guide fermé.

## 5.6 Étude numérique de guides *hard*

### 5.6.1 Première structure

#### Structure et relation de dispersion

La surface *hard* à partir de laquelle les parois sont créées n'est autre que celle de la section précédente. Pour rappel,

$$h_d = 0.25, h_m \simeq 0, l_m = 0.2, p = 0.3 \text{ et } \varepsilon = 5. \quad (5.6.1)$$

Les dimensions du guide sont à nouveau  $l_x = l_y = 1$  et la figure 5.28 en représente une section droite.

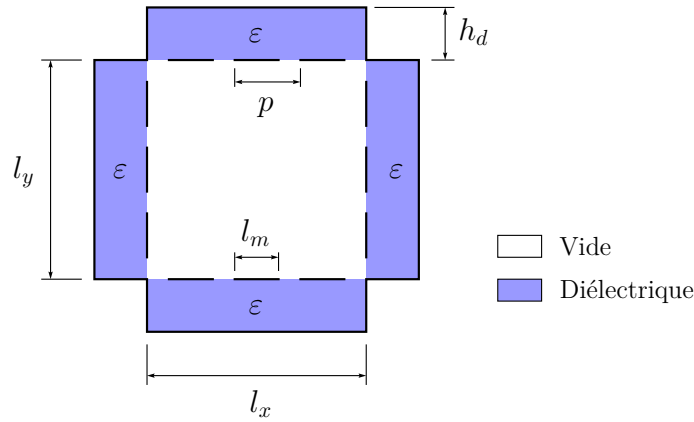


Figure 5.28 – Section droite du guide.

On l'a vu (figure 5.24), la surface *hard* dont il est question présente plusieurs lieux de fonctionnement. Pour le cas de l'incidence rasante, les longueurs d'ondes concernées sont approximativement  $\lambda_0^{inc} = 2.5$  et  $\lambda_0^{inc} = 0.83$ . Il faut s'attendre à ce qu'un mode quasi-TEM uniforme se propage aux points

$$(\omega, k_z) = \left( \frac{2\pi}{\lambda}, k_0 \right) \simeq \begin{cases} (2.5, 2.5), \\ (7.6, 7.6). \end{cases} \quad (5.6.2)$$

La figure suivante représente deux versions de la relation de dispersion du guide et confirme l'existence d'une solution au premier point envisagé.

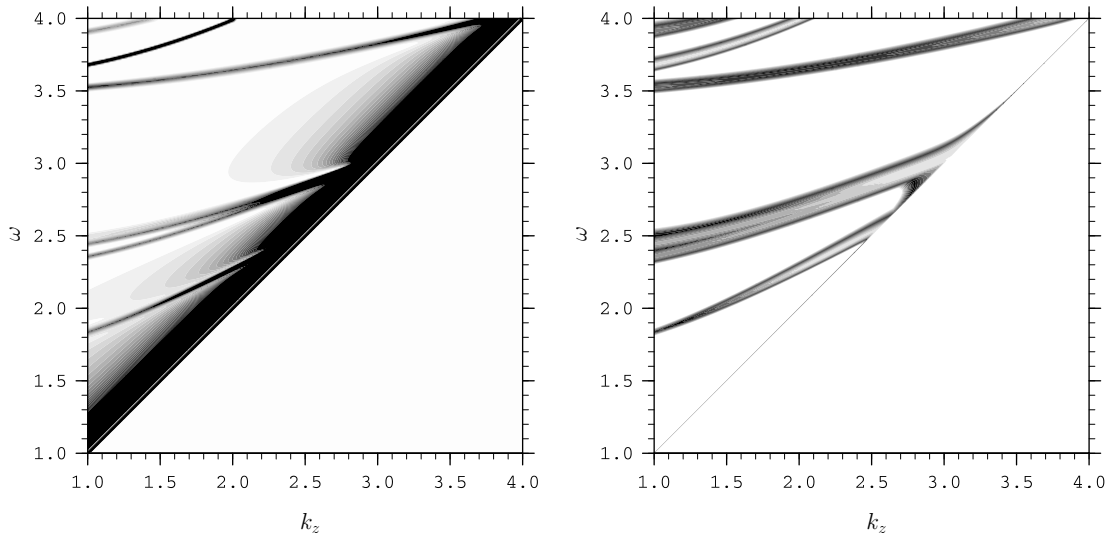


Figure 5.29 – Deux versions de la relation de dispersion du guide *hard* par la méthode des sources fictives. À gauche, une fonction du déterminant de la matrice  $A'$  ; à droite, la plus petite valeur propre de la matrice  $A'$ .

À nouveau, ces relations de dispersion sont peu précises. Les degrés de liberté laissés par la méthode des sources fictives rendent difficile le traitement de ce genre de structures car la présence d'une multitude d'angles et de pointes dégrade la qualité des résultats (le placement des sources n'est vraisemblablement pas adapté à la configuration). Il faudrait trouver une meilleure technique de placement des sources afin de pouvoir étudier des guides aux dimensions plus conséquentes.

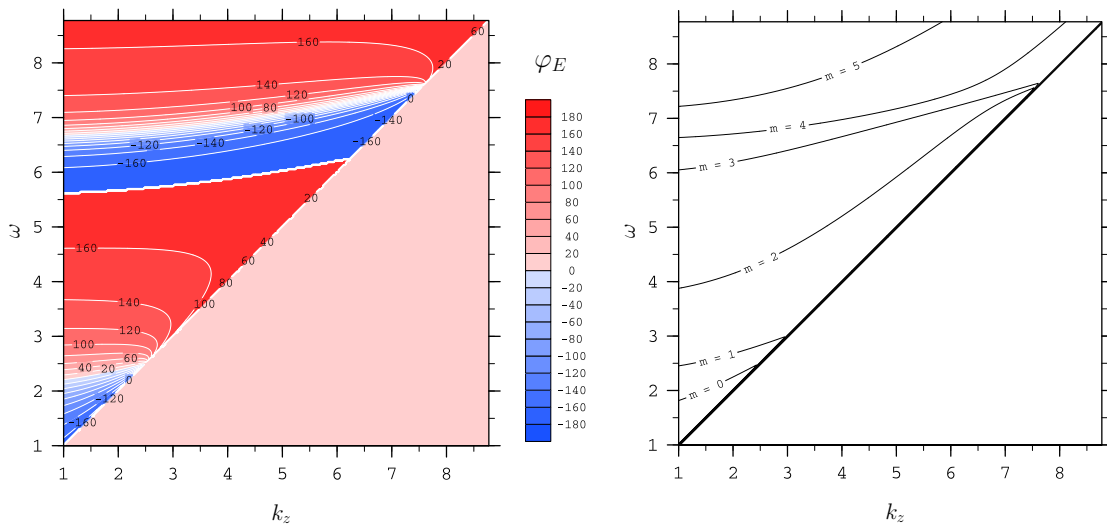


Figure 5.30 – À gauche : phase du coefficient de réflexion de la surface en polarisation TE. À droite : la relation de dispersion du guide déduite de la zigzag path theory.

La partie gauche de la figure 5.30 représente la phase du coefficient de réflexion de la surface en question dans l'espace  $(\omega, k_z)$ . C'est une autre représentation de la figure 5.24 pour laquelle  $\varphi_E$  évoluait dans l'espace  $(\lambda_0^{inc}, \theta^{inc})$ . La partie droite de la figure 5.30 décrit le comportement des modes prévus par la théorie du zigzag et dont l'ordre  $m$  va de 0 à 5. Conformément à ce qui a été expliqué précédemment — se référer aux équations (5.5.5), (5.5.6) et (5.5.7) de la sous-section 5.5.1 — seuls les modes pairs nous intéressent car ce sont eux qui sont susceptibles d'être quasi-TEM.

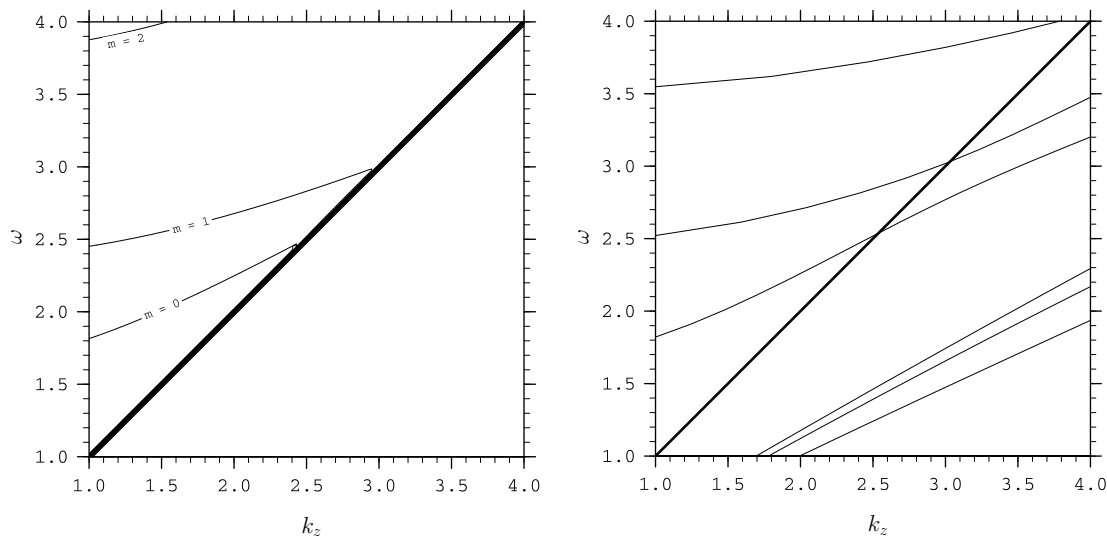


Figure 5.31 – À gauche : restriction de la relation de dispersion issue de la zigzag path theory à  $\omega, k_z \in [1, 4]$ . À droite : relation de dispersion générée par Ansoft HFSS.

Suivent quelques commentaires sur les trois relations de dispersion obtenues à l'aide des différentes méthodes.

- Le graphe de droite de la figure 5.31 indique que la méthode des éléments finis détecte<sup>2</sup> trois modes se propageant « dans les murs ». Ce sont les trois portions de

<sup>2</sup>Seul un quart de la structure est simulé.

droite visibles sous la caractéristique  $\omega = k_z$ . Ceux-ci ne sont naturellement pas prévus par la théorie du zigzag et juste ignorés par la méthode des sources fictives pour gagner en temps de calcul.

- Les deux premiers modes, indexés  $m = 0$  et  $m = 1$ , apparaissent quelle que soit la méthode employée (voir les figures 5.29, 5.31 gauche et 5.31 droite.)
- La méthode des sources fictives aussi bien que la méthode des éléments finis, détecte un mode non-prévu par la théorie du zigzag. La courbe de dispersion de celui-ci passe par le point  $(\omega, k_z) \simeq (3.52, 1)$ .
- Contrairement aux autres méthodes, la méthode des sources fictives détecte un mode dont la courbe de dispersion passe par la point  $(\omega, k_z) \simeq (3.68, 1)$ .
- Le mode indexé  $m = 2$  et prévu par la théorie du zigzag est bien détecté par la méthode des sources fictives mais ignoré par Ansoft HFSS.

Les trois processis employés pour établir la relation de dispersion de guides *hard* sont *globalement* en accord. Certaines différences sont vraisemblablement dues à la modélisation du problème ou à la précision des itérations laquelle varie d'une méthode à l'autre.

### Forme des premiers modes

Toutes les cartes de champs qui suivent sont générées par la méthode des sources fictives. La taille du guide est limitée car la détection ainsi que la génération de modes pour des structures de cette complexité nécessite un temps de calcul non-négligeable. Le guide possédant certaines symétries, chaque mode est dégénéré deux fois et une carte de champ est la représentation de l'un des deux vecteurs propres correspondant aux deux valeurs propres minimales de la matrice  $A'$ .

**Premier mode pair** Le premier mode quasi-TEM prévu par la théorie du zigzag apparaît lorsque  $\varphi_E$  s'annule pour la première fois en fonction de la fréquence. Sa relation de dispersion est celle dont la fréquence de coupure est la plus basse sur la figure 5.30 et la meilleure carte de champ que l'on peut espérer se trouve en « incidence rasante », soit  $\omega = k_z = 2.5$ .

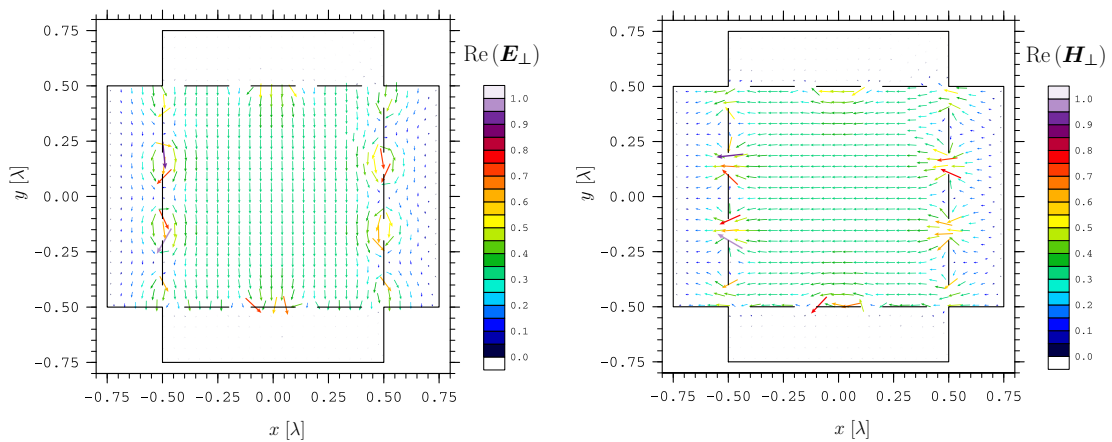


Figure 5.32 – Champs transverses du premier mode pair,  $m = 0$ , pour  $(\omega, k_z) = (2.5, 0.996k_0)$  soit  $(\lambda, \theta) = (2.5, 85^\circ)$  pour une surface ouverte.

On observe l'uniformité des champs électrique et magnétique transverses dans le cœur malgré quelques perturbations au niveau des points métalliques. Les variations observées au voisinage des parois sont conformes à celles constatées lors de l'étude de surfaces



ouvertes et on retrouve la notion de surface effective.

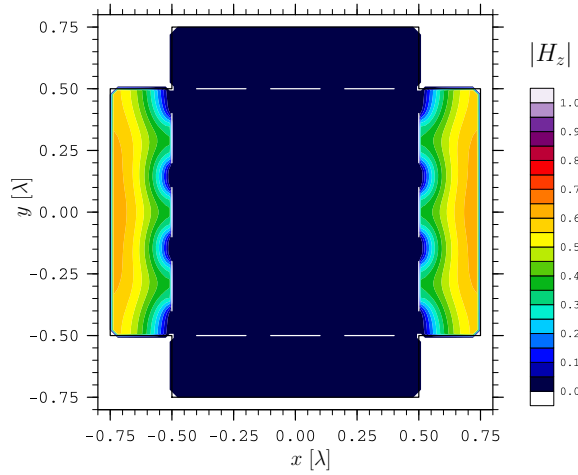


Figure 5.33 – *Champ magnétique longitudinal du premier mode pair,  $m = 0$ , pour  $(\omega, k_z) = (2.5, 0.996k_0)$  soit  $(\lambda, \theta) = (2.5, 85^\circ)$  pour une surface ouverte.*

Concernant la partie longitudinale du champ, elle est nulle dans le cœur. En dehors, « dans les murs », seul le champ magnétique subsiste.

**Second mode pair** Le second mode pair prévu par la théorie du zigzag, indexé  $m = 2$ , est intéressant au point  $\omega = k_z = 7.6$ .

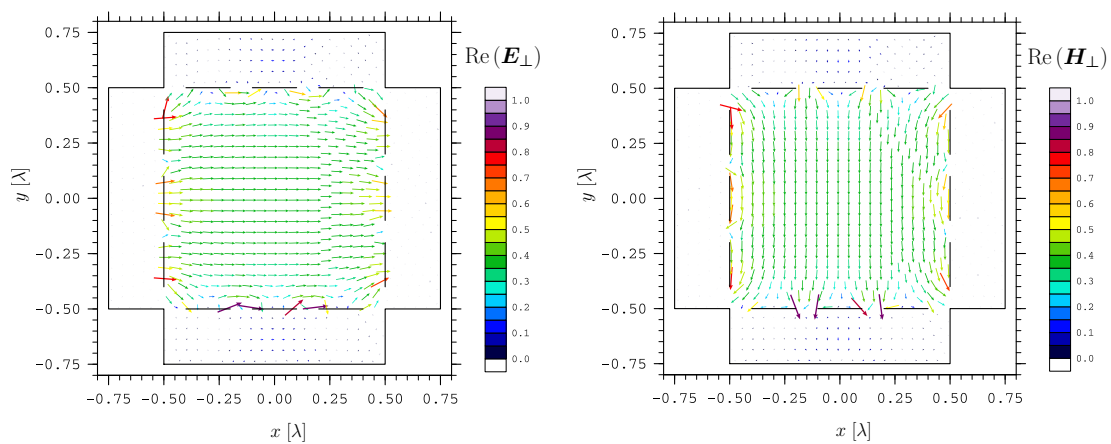


Figure 5.34 – *Champs transverses du second mode pair,  $m = 2$ , pour  $(\omega, k_z) = (7.6, 0.996k_0)$  soit  $(\lambda, \theta) = (0.83, 85^\circ)$  pour une surface ouverte.*

Ces cartes de champ sont similaires à celles du premier mode pair. Le champ est transverse et uniforme presque partout dans le cœur.

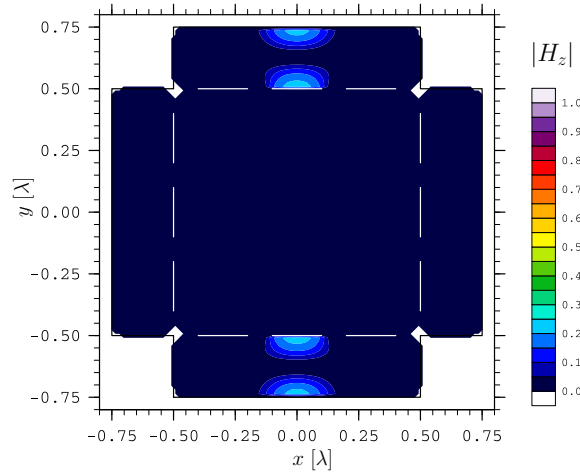


Figure 5.35 – *Champ magnétique longitudinal du second mode pair,  $m = 2$ , pour  $(\omega, k_z) = (7.6, 0.996k_0)$  soit  $(\lambda, \theta) = (0.83, 85^\circ)$  pour une surface ouverte.*

On remarque cependant que le champ magnétique longitudinal est beaucoup plus faible que dans le cas du mode  $m = 0$ .

### 5.6.2 Seconde structure

Si les quelques guides évoqués précédemment étaient pratiques pour comprendre les différents phénomènes qu'implique l'utilisation de surfaces *hard*, ils ne sont pas réalistes quant à une application réelle. En particulier, les surfaces utilisées sont trop épaisses devant les dimensions du cœur. Nous avons tenu à appliquer les résultats précédents à de plus grandes structures à l'aide de logiciels basés sur la méthode des éléments finis ; les logiciels commerciaux Ansoft HFSS et COMSOL Multiphysics ont été utilisés.

#### Surface

La surface utilisée par la suite a pour différentes dimensions

$$h_d = 2.5 \text{ mm}, h_m \simeq 0, l_m = 3 \text{ mm}, p = 5 \text{ mm} \text{ et } \varepsilon = 5. \quad (5.6.3)$$

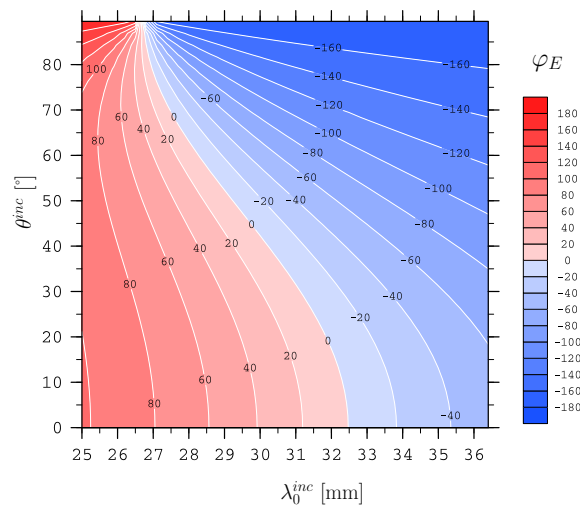


Figure 5.36 – *Phase du coefficient de réflexion en polarisation TE.*

En incidence rasante, comme le montre la figure 5.36, la phase du coefficient de réflexion en polarisation TE s'annule au voisinage de  $\lambda_0^{inc} = 26.6$  mm soit une fréquence de 11.3 GHz.

### Relations de dispersion pour différentes tailles de guides

À partir d'une même surface *hard*, plusieurs tailles de guides ont été envisagées. Suivant le cas, leurs parois comprennent cinq, sept puis neuf périodes complètes. Cela nous permet d'illustrer le fait que la fréquence (11.3 GHz) à laquelle se propage le premier mode quasi-TEM est indépendante des dimensions du guide.

Afin d'accélérer les calculs, nous avons tiré parti de la symétrie du guide en ne modélisant qu'un quart de la structure. Par la suite, un plan de symétrie dit « E » équivaut à un plan *PEC* immatériel et un plan de symétrie dit « H » équivaut, lui, à un plan *PMC* immatériel. Concernant les relations de dispersion, cela a pour incidence de ne faire apparaître que les courbes correspondant aux modes (de la structure complète) ayant la symétrie adéquate.

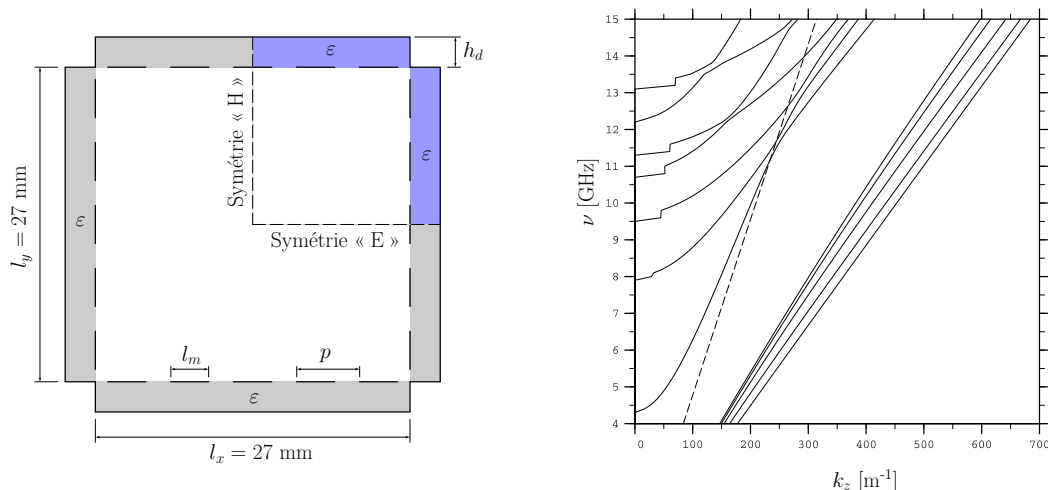


Figure 5.37 – Relation de dispersion partielle d'un guide de 27 mm (5 périodes par face).

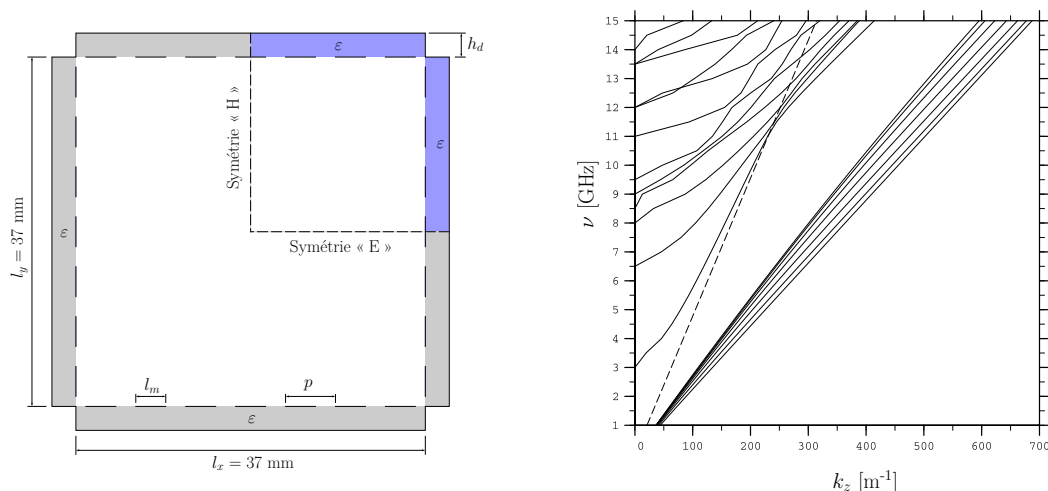


Figure 5.38 – Relation de dispersion partielle d'un guide de 37 mm (7 périodes par face).

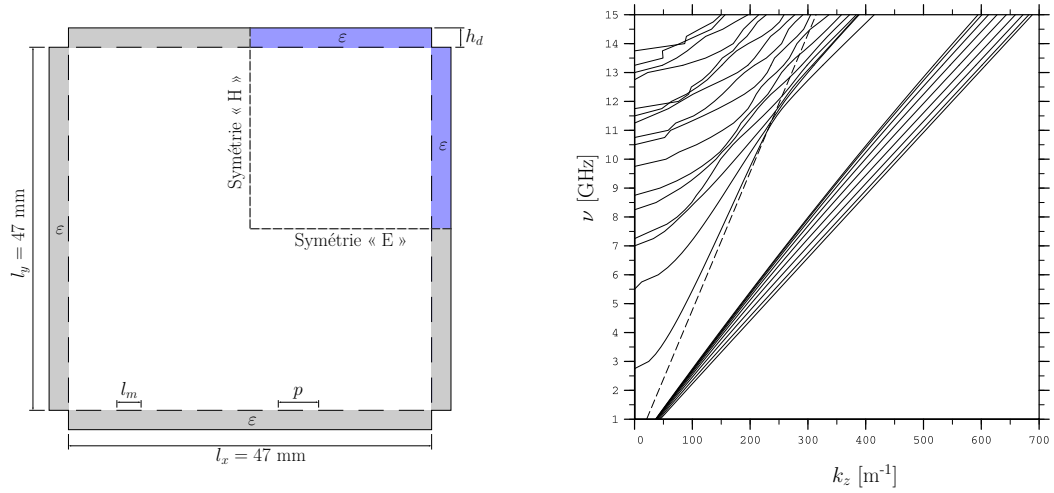


Figure 5.39 – Relation de dispersion partielle d'un guide de 47 mm (9 périodes par face).

Au niveau des trois dernières relations de dispersion (figures 5.37, 5.38 et 5.39), on observe quelques discontinuités ainsi que des points d'inflexion anormaux. Cela s'explique simplement par le fait que l'algorithme de détection et de suivi de modes fait la confusion entre deux modes voisins. Une discrétisation plus fine en fréquence serait sûrement à même de palier au problème.

La figure qui suit représente la relation de dispersion complète du guide le plus grand ( $l_x = l_y = 47$  mm).

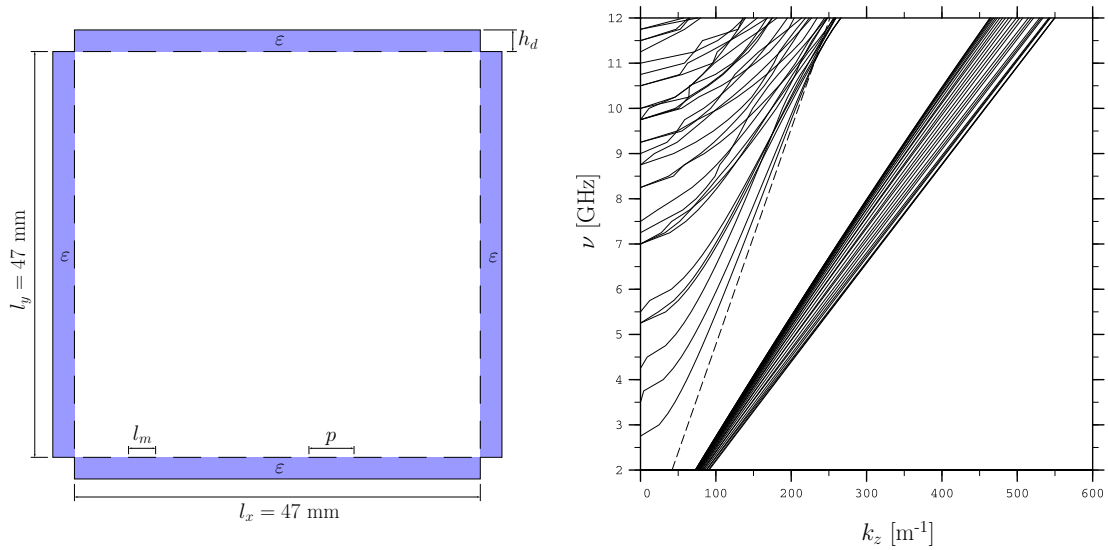


Figure 5.40 – Relation de dispersion totale d'un guide de 47 mm (9 périodes par face).

On constate qu'autour de la fréquence d'intérêt, 11.3 GHz, existe une multitude de modes indésirables. La taille du guide ainsi que la nature des parois latérales impliquent l'existence de nombreux modes aux fréquences élevées et se pose le problème de leur filtrage.

À cette étape, il est nécessaire de reconsidérer l'étude initiale qui est celle de l'antenne et dont les modes sont les résonances d'une cavité 3-D. Cette dernière est fermée d'un

côté par un plan de masse et, de l'autre, par une grille de sortie. Il semble probable que les contraintes imposées par une alimentation bipolaire ainsi que par la fermeture de l'antenne effectuent l'essentiel du filtrage sur les modes du résonateur.

### Cartes de champs pour un guide de plus grande taille

Nous avons recours à la méthode des éléments finis pour traiter le cas d'un guide dont les dimensions sont trop importantes devant ce que tolère la méthode des sources fictives. La figure ci-dessous est une représentation du maillage généré par le logiciel COMSOL dans le cas du guide de 27 mm de côté.

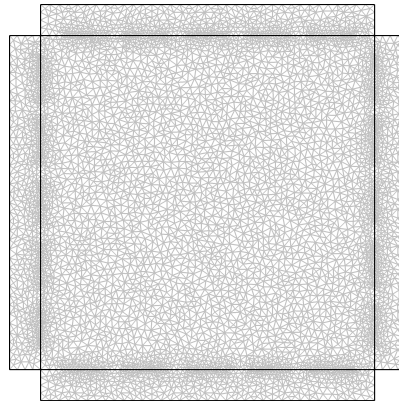


Figure 5.41 – Maillage généré par le logiciel COMSOL (11692 nœuds) pour l'étude d'une section droite du guide de 27 mm de côté.

Ce logiciel permet d'effectuer une recherche de modes autour d'un certain indice effectif et ce à fréquence constante. En suivant la courbe de dispersion du premier mode, on arrive à

$$\frac{k_z}{k_0} = 0.998566 \text{ et } \omega = 10.9 \text{ GHz.} \quad (5.6.4)$$

En ce point de fonctionnement, les champs électrique et magnétique sont purement transverses dans le cœur.

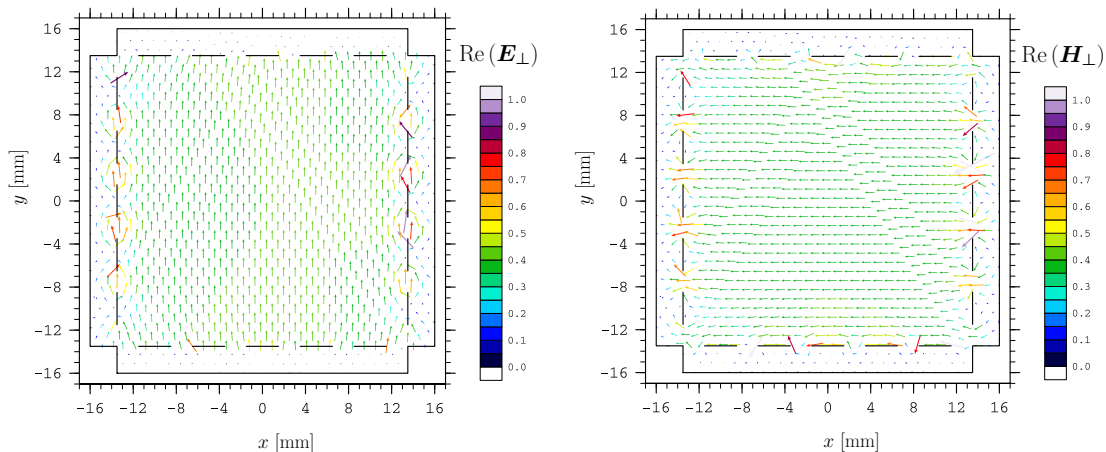


Figure 5.42 – Champs transverses du premier mode pair,  $m = 0$ , pour  $(\omega, k_z) = (10.9 \text{ GHz}, 0.999k_0)$  soit  $(\lambda, \theta) = (2.75, 87^\circ)$  pour une surface ouverte.

Au sein des parois, seule la partie longitudinale du champ magnétique subsiste.

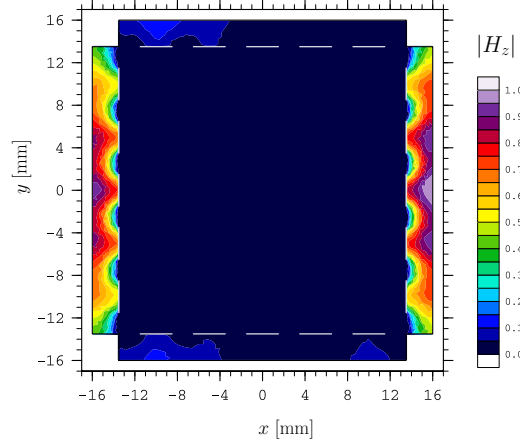


Figure 5.43 – *Champ magnétique longitudinal du premier mode pair,  $m = 0$ , pour  $(\omega, k_z) = (10.9 \text{ GHz}, 0.999k_0)$  soit  $(\lambda, \theta) = (2.75, 87^\circ)$  pour une surface ouverte.*

Bien que la fréquence à laquelle se propage le mode quasi-TEM soit quelque peu différente de celle attendue, 10.9 GHz contre 11.3 GHz (soit environ 3.5 % d'écart), champs électrique et magnétique se comportent de façon similaire à ce qui a été constaté précédemment lors de l'étude de guides de plus petite taille. Par conséquent, il est tout à fait envisageable d'obtenir le même effet à partir de structures plus conséquentes tel le guide de 47 mm de côté.

## 5.7 Conclusion

L'étude couplée des coefficients de réflexion et du champ évanescent au voisinage de certaines surfaces *hard* envisagées permet d'apprécier leurs capacités de manière exhaustive ainsi que de les comparer entre elles. Il apparaît que les surfaces à base de lignes micro-rubans sont plus performantes que leurs équivalents corrugués. En effet, si les surfaces corruguées présentent au mieux un comportement *PMC*, les pistes métalliques déposées sur un substrat diélectrique sont effectivement *hard* sur une large plage de longueurs d'onde et d'incidences.

Suivant la méthode numérique employée, la modélisation de guides dont les parois sont structurées de la sorte peut s'avérer coûteuse en temps machine. L'approche que nous avons adoptée et qui se base sur l'étude des coefficients de réflexion accompagnée d'un principe simple issu de l'optique géométrique (la *zigzag path theory*) permet de très rapidement prédire le comportement du mode fondamental — le seul qui nous intéresse — au sein d'une structure guidante corruguée ou bien tapissée de microrubans. La justesse de cette approche est validée par des résultats numériques (relations de dispersion et cartes de champs) ; ceux-ci sont issus de méthodes numériques différentes — la méthode des sources fictives et la méthode des éléments finis — et restent concordants entre eux.

On constate que, bien que le phénomène exploité soit une propriété d'un réseau infini, cet effet se retrouve de manière identique à l'intérieur d'un guide de section finie et dont les parois comprennent un nombre limité de périodes. Cela constitue une qualité indéniable de ce type de surfaces car le phénomène assurant la propagation du mode quasi-TEM fondamental est indépendant des dimensions transverses du guide.

Pour un guide *hard* de grande taille<sup>3</sup> que l'on alimente à la fréquence de fonctionnement des parois, le mode quasi-TEM se propage en même temps que de nombreuses autres solutions. Leur filtrage est nécessaire mais il est sans doute préférable que cette étape entre en ligne de compte uniquement dans un deuxième temps, lors de la conception du résonateur (tridimensionnel). En effet, plusieurs contraintes portant sur la symétrie des modes de cavité peuvent être apportées par le dispositif d'alimentation ainsi que par la grille de sortie.

Les surfaces *hard* rendent possible l'excitation d'un mode quasi-TEM uniforme dans un guide clos mais, contrairement aux surfaces *PMC*, donnent aussi l'accès à deux polarisations linéaires et orthogonales. Leur intégration dans une antenne compacte permettrait d'augmenter de manière conséquente l'efficacité de surface de cette dernière.

---

<sup>3</sup>Typiquement, le double de la longueur d'onde de fonctionnement.

# Conclusion générale

## Premier volet

En calquant les propriétés d'un cristal photonique monodimensionnel sur celles d'un milieu homogène anisotrope, nous avons obtenu une expression analytique des grandeurs effectives de ce cristal. L'accès à de telles données nous permet de constater un fait d'importance : *les grandeurs effectives d'un cristal photonique monodimensionnel sans pertes sont en général complexes*. Cependant, si la cellule élémentaire du cristal est organisée de manière symétrique, ces grandeurs effectives sont purement réelles.

Une grandeur effective dont la partie imaginaire est non-nulle est synonyme de mauvaise adaptation d'impédance entre le cristal et le milieu environnant. Dans l'optique d'applications en transmission, une conclusion s'impose d'elle-même : le fonctionnement d'un cristal monodimensionnel est optimal lorsque ses grandeurs effectives sont réelles, c.-à-d. lorsque sa cellule élémentaire est organisée de manière symétrique par rapport à un plan horizontal.

Il s'avère que cette condition s'applique aux structures monodimensionnelles tandis qu'elle apparaît comme trop contraignante pour des cristaux bidimensionnels. Dans ce cas précis, l'équivalent du plan de symétrie est un plan contenant les axes de symétrie de la structure. Ce second critère devra être respecté si l'on souhaite améliorer le rendement de systèmes complexes comme une lentille plate ou un superprisme.

## Second volet

La requête de Thales Alenia Space dans son projet pour la réalisation d'antennes compactes nous a amené à planifier le travail en deux étapes :

1. le développement d'un outil numérique capable de traiter
  - le problème de la diffraction par un réseau au profil quelconque<sup>4</sup> et ce en monture conique (géométrie dite « 2.5-D »),
  - le problème de la propagation de modes guidés dans une enceinte métallique de section quelconque<sup>5</sup> ;
2. la mise en pratique de cet outil accompagnée de celle de codes numériques existants pour la recherche de modes quasi-TEM uniformes guidés.

La méthode des sources fictives permet *a priori* de s'attaquer à une grande variété de formes cependant le positionnement des sources devient délicat lorsque les formes mises en jeu présentent beaucoup d'angles ou de pointes. Cependant, lorsque la convergence des résultats est peu sensible vis-à-vis de la position des sources, cette méthode s'avère très per-

<sup>4</sup>Dans une certaine mesure.

<sup>5</sup>Idem.



formante en configuration conique ou non. Différents critères sont disponibles pour assurer de la qualité des résultats et une précision donnée est en général rapidement obtenue.

Plusieurs extensions sont apportées à la méthode des sources fictives.

1. Le théorème de Bloch est utilisé pour simuler la diffraction d'une onde plane par un réseau. Cette technique consiste à imposer des conditions aux limites périodiques sur un objet particulier — une cellule — représentatif de la période du réseau et à exprimer le champ sous la forme de développements de Rayleigh hors du réseau. Grâce à cet objet, le calcul de la fonction de Green périodique est évité et les limitations sur les caractéristiques optiques de la période sont faibles.
2. Les sources fictives sont aussi étendues à la recherche de modes susceptibles de se propager dans des guides de section arbitraire. Cette recherche, qui passe par la résolution d'un problème aux valeurs propres, s'avère très efficace lorsque le profil des objets est suffisamment lisse et encore plus particulièrement lorsque les matériaux sont infiniment conducteurs.

L'optimisation de l'efficacité de surface d'une antenne à cavité résonante a été abordée comme l'excitation d'un mode quasi-TEM uniforme dans un guide de section rectangulaire. La propagation d'un tel mode dans un guide en majeure partie métallique est rendue possible grâce à l'intégration de surfaces *hard*. À leur sujet, les solutions proposées dans la littérature sont toutes sélectives en fréquence et sont de deux types : les surfaces corruguées et les surfaces à base de lignes microrubans. Pour chaque type, nous avons porté notre attention sur leur comportement en champ lointain par l'étude de coefficients de réflexion mais aussi sur leur comportement en champ proche à l'aide de cartes de champs prises au voisinage de la surface. En effet, la partie évanescence du champ au voisinage des pièces métalliques montre toute son importance quant à la structure du mode généré. Les forts courants circulants aux pointes détériorent d'autant l'aspect uniforme du mode quasi-TEM.

Des deux types de surface étudiés, les surfaces à base de lignes microrubans semblent les plus flexibles. Les différents modes quasi-TEM qui ont été générés dans des guides basés sur ce type de surface sont très proches de ce qui est souhaitable pour accroître l'efficacité de surface de l'antenne. Il est observé que le champ est effectivement transverse et uniforme (en amplitude comme en polarisation) sur la majeure partie de la section utile du guide.

Il convient de garder à l'esprit que l'idéal dans le domaine du spatial est un module rayonnant intégralement métallique<sup>6</sup>. À ce sujet, il nous semble difficile de s'affranchir de matériau diélectrique pour la fabrication de surfaces *hard*. Peut-être certaines structures métalliques plus complexes seront à l'avenir susceptibles de jouer le rôle de diélectrique artificiel dans le domaine des micro-ondes.

L'existence des modes quasi-TEM uniformes étant basée sur une propriété d'un réseau, ces derniers ont l'avantage indéniable de n'apparaître qu'à la fréquence voulue et ce quelles que soient les dimensions transverses du guide. Bien que la tâche consistant à filtrer les modes indésirables qui se surajoutent au mode fondamental puisse s'avérer compliquée, l'intégration de telles surfaces dans une cavité résonante semble plus que prometteuse dans le but d'augmenter l'efficacité de surface d'un module élémentaire d'un ESA et, par conséquent, sa directivité.

---

<sup>6</sup> Afin d'éviter des problèmes de dégazage, de dilatation, d'échauffement, etc.

## **Annexes**



## Annexe A

# Le critère de la « *low-absorption limit* »

### A.1 Valeurs propres de la matrice de transfert

Les deux valeurs propres de  $T$ ,  $\lambda_+$  et  $\lambda_-$ , sont les racines de son polynôme caractéristique ;  $V_+$  et  $V_-$  sont les vecteurs propres associés.

$$\lambda_{\pm}^2 - \text{tr}(T) \lambda_{\pm} + \det(T) = 0. \quad (\text{A.1.1})$$

En reprenant les définitions de la section 2.2.2, on a

$$\lambda_{\pm} = g \pm i\sqrt{1 - g^2}. \quad (\text{A.1.2})$$

Dans le *gap*,

$$g > 1 \Rightarrow 1 - g^2 < 0 \Rightarrow \sqrt{1 - g^2} \in \mathbb{C}, \quad \text{Im}\sqrt{1 - g^2} > 0. \quad (\text{A.1.3})$$

Afin d'étudier les implications du choix de la coupure dans la définition de la racine, posons

$$g = g' + ig'', \quad (\text{A.1.4})$$

$$\sqrt{1 - g^2} = \gamma' + i\gamma'', \quad (\text{A.1.5})$$

et calculons la différence  $|\lambda_+|^2 - |\lambda_-|^2$ .

$$\begin{aligned} |\lambda_+|^2 - |\lambda_-|^2 &= \left(g + i\sqrt{1 - g^2}\right) \left(g + i\sqrt{1 - g^2}\right)^* - \left(g - i\sqrt{1 - g^2}\right) \left(g - i\sqrt{1 - g^2}\right)^* \\ &= [g + i(\gamma' + i\gamma'')] [g^* - i(\gamma' - i\gamma'')] - [g - i(\gamma' + i\gamma'')] [g^* + i(\gamma' - i\gamma'')] \\ &= \dots \\ &= 4\gamma'g'' - 4\gamma''g' \end{aligned} \quad (\text{A.1.6})$$

En exploitant les relations (A.1.4) et (A.1.5), il est possible d'exprimer  $1 - g^2$  de deux manières.

$$1 - g^2 = \begin{cases} 1 - g'^2 + g''^2 - 2ig'g'' \\ \gamma'^2 - \gamma''^2 + 2i\gamma'\gamma'' \end{cases} \quad (\text{A.1.7})$$

Par identification, cela implique directement

$$\gamma' \gamma'' = -g' g'', \quad (\text{A.1.8})$$

$$\gamma'^2 - \gamma''^2 = 1 - g'^2 + g''^2. \quad (\text{A.1.9})$$

Dans le *gap*, le terme  $\sqrt{1 - g^2}$  est complexe de partie imaginaire ( $\gamma''$ ) positive et, après avoir multiplié l'équation (A.1.6) par  $\gamma''$ , la relation (A.1.8) nous permet d'écrire

$$\gamma'' (|\lambda_+|^2 - |\lambda_-|^2) = -4(\gamma''^2 + g''^2)g'. \quad (\text{A.1.10})$$

Le signe de la différence  $|\lambda_+|^2 - |\lambda_-|^2$  est donné par celui de la partie réelle de la demi-trace de  $T$ ,  $g'$ .

Introduisons les variables temporaires  $v_+$  et  $v_-$  au niveau de la définition des vecteurs propres).

$$TV_{\pm} = \lambda_{\pm} V_{\pm}, \quad V_{\pm} = \begin{bmatrix} 1 \\ v_{\pm} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.1.11})$$

L'élément supérieur de chacun est arbitrairement fixé à l'unité. Ainsi,

$$v_{\pm} = \frac{\lambda_{\pm} - t_{11}}{t_{12}} = \frac{-s \pm i\sqrt{1 - g^2}}{t_{12}}. \quad (\text{A.1.12})$$

Dans le cadre de la limite de faible absorption, au moins une des strates de la cellule élémentaire du cristal semi-infini est faiblement absorbante. Le cristal étant infini « vers le bas », le champ à l'interface entre le substrat et le cristal est nul à la limite. La transmission est donc nulle à la limite et cela équivaut à un *gap*.

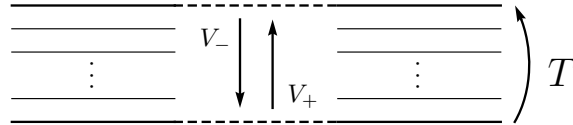


Figure A.1 – « *Orientation* » de la matrice de transfert et de ses vecteurs propres.

Lorsqu'il y a de l'absorption, il a été montré dans [E18] que les valeurs propres de la matrice de transfert élémentaire ne sont pas de module unitaire. L'expression (A.1.10) prise avec  $g' = \text{Re}(g) > 0$  implique

$$|\lambda_+| < 1 \quad \text{et} \quad |\lambda_-| > 1. \quad (\text{A.1.13})$$

Une période prise de bas en haut (la matrice  $T$  est ainsi définie), un champ se propageant vers le haut s'atténue si l'on considère l'état propre « + » tandis qu'il s'amplifie (ce qui entre en contradiction avec l'hypothèse d'absorption) si l'on considère l'état propre « - ». Symétriquement, un champ se propageant vers le bas s'atténue si l'on considère l'état propre « - ». C'est cet état qu'il faut retenir pour obtenir un champ borné dans l'ensemble du cristal<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Dont, rappelons-le, l'interface basse est rejetée à l'infini.

## A.2 Constante de propagation dans le cristal

À l'interface entre le superstrat et le cristal, les coefficients de transmission se notent  $t^U$ ,  $U = E, H$ ; et le champ dans le cristal vaut

$$t^U V_- = t^U \begin{bmatrix} 1 \\ v_- \end{bmatrix}. \quad (\text{A.2.1})$$

À cette même interface champs électrique et magnétique sont continus et les équations de Maxwell conduisent à

$$\begin{bmatrix} 1 + r_{\#}^U \\ \frac{1}{\nu_i} (-ik_{i,\perp} + ik_{i,\perp} r_{\#}^U) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^U \\ t^U v_- \end{bmatrix}. \quad (\text{A.2.2})$$

La résolution de ce système donne les coefficients de réflexion

$$r_{\#}^U = \frac{\beta_i^{\nu} - iv_-}{\beta_i^{\nu} + iv_-}. \quad (\text{A.2.3})$$

En prenant

$$\beta_{\#} = iv_- = \frac{-is + \sqrt{1 - g^2}}{t_{12}} = \frac{-is + \text{sgn}(\text{Re}(g)) \sqrt{1 - g^2}}{t_{12}}, \quad (\text{A.2.4})$$

on retrouve la première expression (2.2.11) du coefficient de réflexion lorsque  $g^2$  est supérieur ou égal à l'unité.

Depuis l'équation (A.1.13) et avec pour hypothèse  $g' = \text{Re}(g) < 0$ , le même raisonnement permet de retrouver l'expression (A.2.4) de la constante de propagation  $\beta_{\#}$  mais, cette fois, en considérant l'état propre « + ».



## Annexe B

# Fonctions de Hankel et base multipolaire

### B.1 Fonctions de Hankel

Les fonctions de Hankel  $H_p$  (ou fonctions de Bessel de troisième espèce) sont définies à partir des fonctions de Bessel usuelles  $J_p$  (ou fonctions de Bessel de première espèce) et des fonctions de Neumann  $N_p$  (ou fonctions de Bessel de deuxième espèce).  $p$  est *a priori* réel.

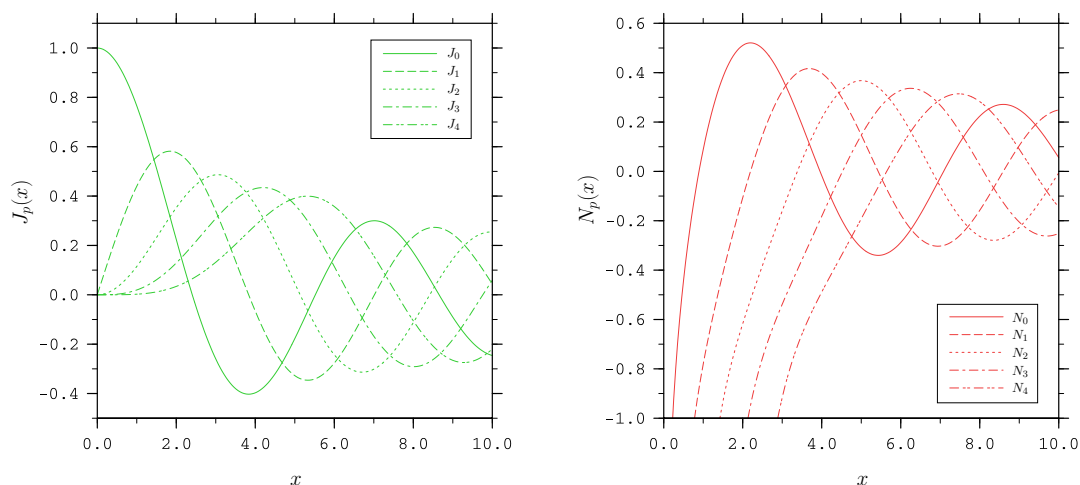


Figure B.1 – Quelques fonctions de Bessel (à gauche) et quelques fonctions de Neumann (à droite) pour  $p \in \{0, \dots, 4\}$ .

Contrairement aux fonctions de Bessel, les fonctions de Neumann sont singulières en zéro.

**Définition** La fonction de Hankel d'ordre  $p$  est une combinaison linéaire des fonctions de Bessel et de Neumann toutes deux prises à l'ordre  $p$ . Évaluées en  $z \in \mathbb{C}^*$ , se définissent

- la fonction de Hankel de première espèce :

$$H_p^{(1)} : z \mapsto J_p(z) + iN_p(z) ; \quad (\text{B.1.1})$$

- la fonction de Hankel de deuxième espèce :

$$H_p^{(2)} : z \mapsto J_p(z) - iN_p(z). \quad (\text{B.1.2})$$



**Dérivabilité** Quel que soit leur ordre, les fonctions de Hankel sont de classe  $C^\infty$  en dehors de l'origine et leur dérivée se calcule aisément par la relation

$$\frac{dH_p^{(j)}}{dz} = \frac{nH_p^{(j)}(z)}{z} - H_{p+1}^{(j)}(z), \quad j = 1 \text{ ou } 2. \quad (\text{B.1.3})$$

## B.2 Base multipolaire

Les graphes regroupés dans le tableau ci-dessous représentent l'allure de certaines fonctions de base dans le plan complexe,

$$H_p^{(1)}(k|z|)e^{ip\theta}, \quad p \in \{0, 1, 2\}, \quad (\text{B.2.1})$$

où  $k = (1 + i)/\sqrt{2}$  représente une constante de propagation quelconque et  $\theta = \arg(z)$ .

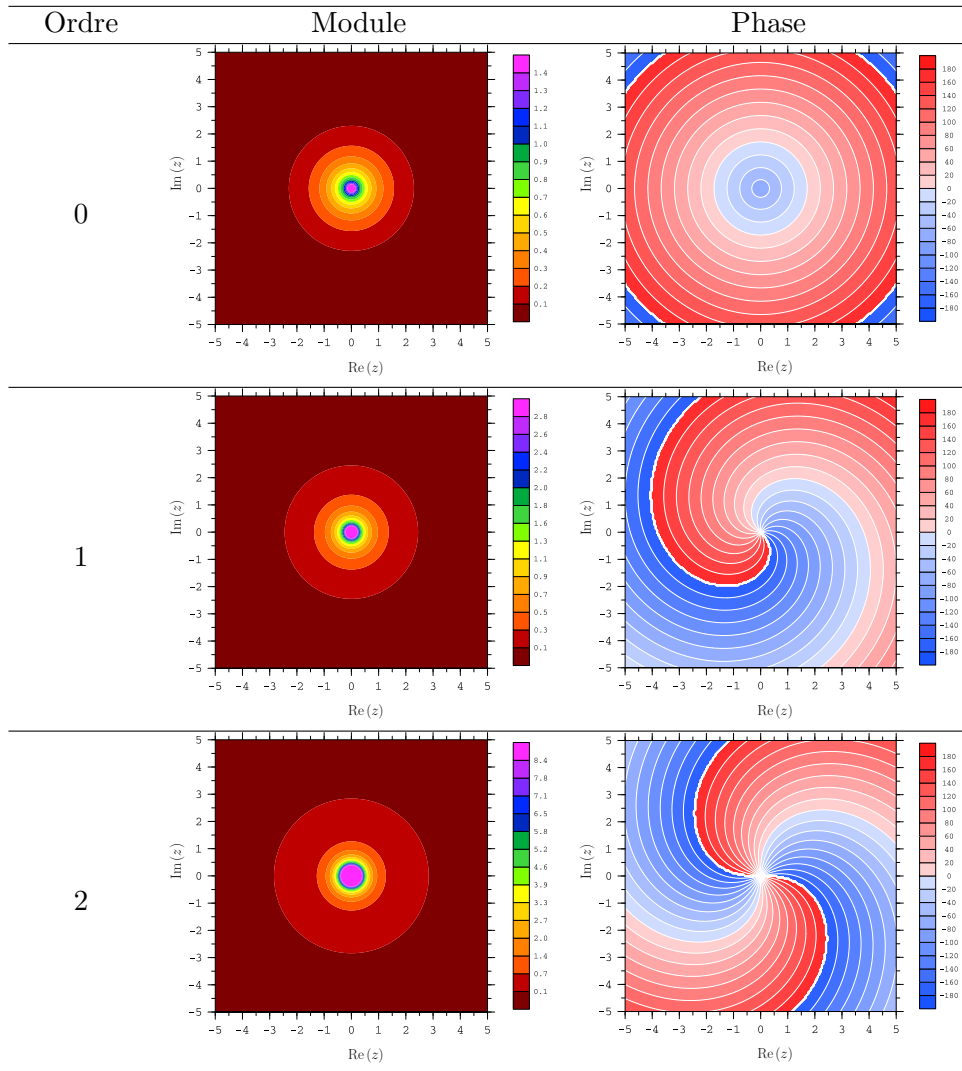


Tableau B.1 – *Formes des modules et phases de certaines fonctions de base pour  $p \in \{0, 1, 2\}$ .*

## Annexe C

# Techniques pour la discrétisation de profils et le placement de sources

### C.1 Discrétisation de profils

#### C.1.1 Superellipses

Initialement, une superellipse d'ordre  $n$  et de dimensions caractéristiques  $a \times b$  obéit à l'équation

$$\left|\frac{x}{a}\right|^n + \left|\frac{y}{b}\right|^n = 1. \quad (\text{C.1.1})$$

Afin de décrire certaines formes caractéristiques du vivant, J. Gielis a étendu cette définition à celle de la « *superformula* » [N17]. En coordonnées polaires  $(r, \theta)$ , celle-ci s'écrit

$$r(\theta) = \frac{1}{\left[\left|\frac{1}{a} \cos\left(\frac{p}{4}\theta\right)\right|^\alpha + \left|\frac{1}{b} \sin\left(\frac{p}{4}\theta\right)\right|^\beta\right]^{1/\gamma}}, \quad \{a, b, p, \alpha, \beta, \gamma\} \in \mathbb{R}^6. \quad (\text{C.1.2})$$

Cette formule permet d'atteindre une vaste gamme de formes dans le plan, symétriques ou non.

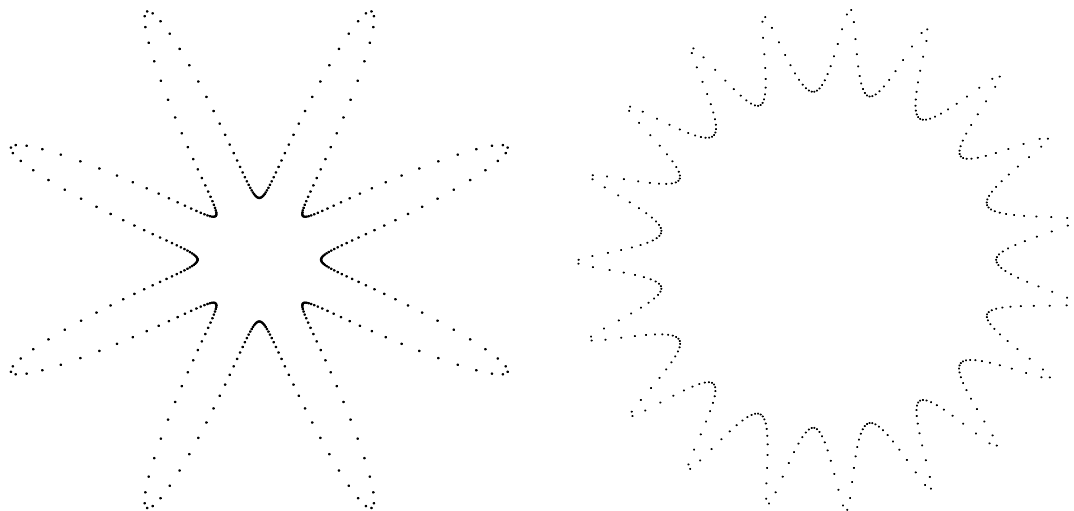


Figure C.1 – Deux superellipses ( $a = b = 1$ ) décrites par 400 points avec, à gauche,  $\{p, \alpha, \beta, \gamma\} = \{8, 1, 5, 8\}$  et, à droite,  $\{p, \alpha, \beta, \gamma\} = \{19, 9, 14, 11\}$ .

### C.1.2 Décomposition en série de Fourier

Un polygone peut être vu comme une application paramétrique  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ ,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto f(t) = x(t) + iy(t) \end{aligned} \tag{C.1.3}$$

*fermée*,  $2\pi$ -périodique et que l'on peut décomposer à l'aide d'une série de Fourier

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikt}. \tag{C.1.4}$$

La somme est tronquée à  $n$  coefficients et la théorie sur le calcul des coefficients  $c_k$  est développée par A. Robert dans [N18].

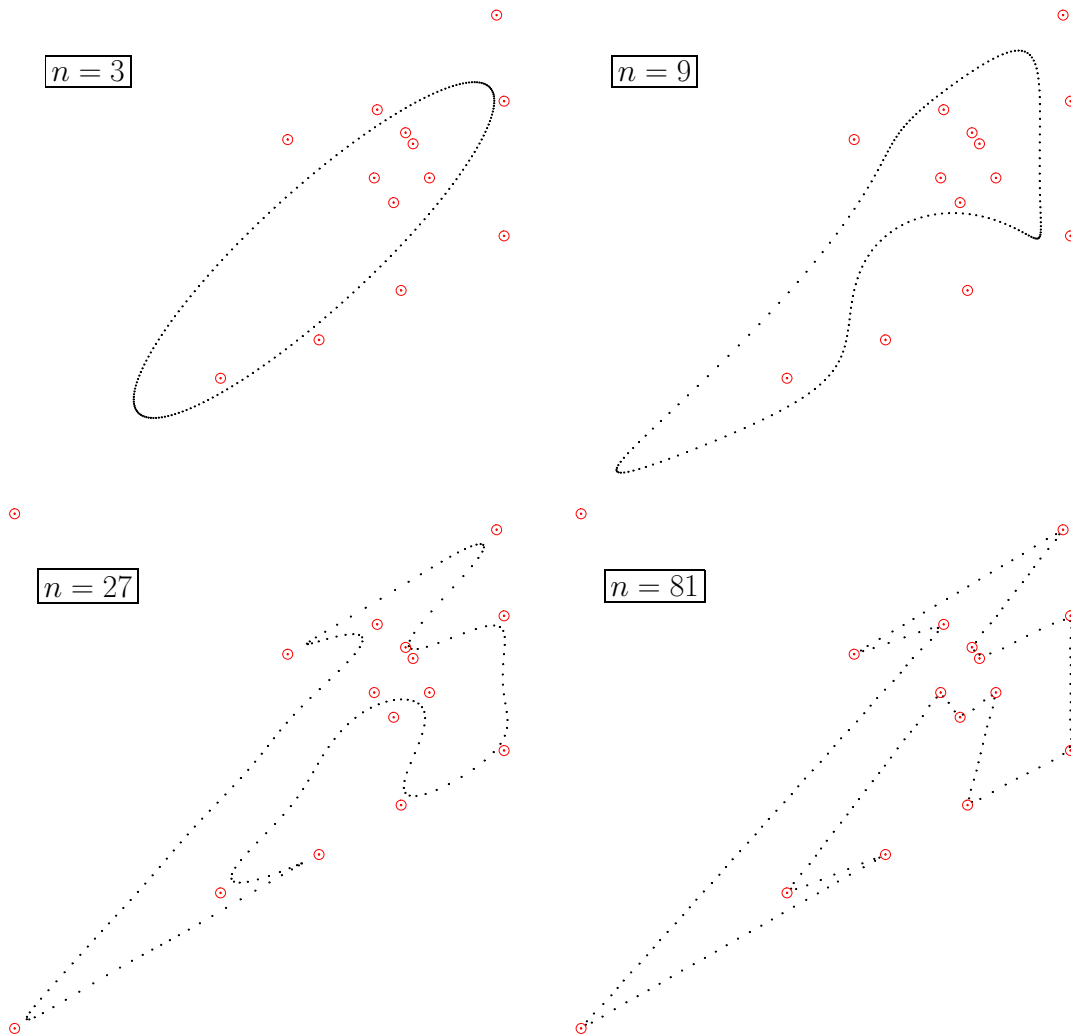


Figure C.2 – *Discrétisation d'un tétradécagone (sommets en rouge) par 200 points placés à l'aide de séries de Fourier à 3, 9, 27 et 81 ordres.*

## C.2 Placement des sources

### C.2.1 Méthode des triangles

La méthode des triangles consiste à placer deux points du profil et une source aux trois sommets d'un triangle isocèle. Les paramètres  $d$  et  $h$  visibles sur la figure C.3 fixent la forme des triangles.

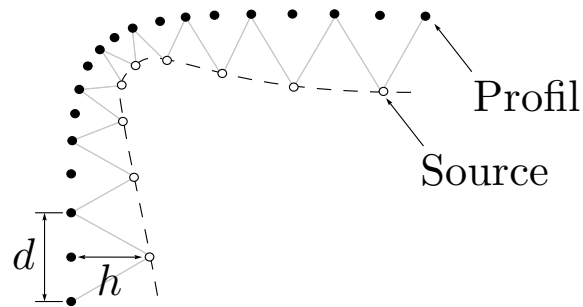


Figure C.3 – Placement de sources à l'aide de la méthode des triangles.

Cette méthode de placement a l'avantage de rapprocher les sources du profil lorsque les points de discrétisation se resserrent. C'est souvent le cas lorsque la courbure du profil est importante.

L'expérience montre que parmi les quelques méthodes connues, celle-ci combinée à celle des polygones de Fourier (section C.1.2) est fiable.

### C.2.2 Homothétie

Une alternative à la méthode des triangles est l'homothétie dont les deux paramètres de contrôle sont le centre et le rapport de la transformation.

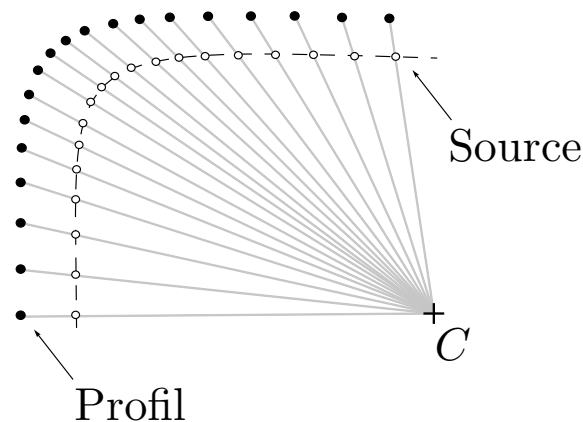


Figure C.4 – Placement de sources à l'aide d'une homothétie de centre  $C$  (rapport quelconque).

Si le placement de sources par homothétie fonctionne bien pour des objets simples, il est difficile pour des objets compliqués : le choix du centre est délicat.



## **Communication scientifique et bibliographie**



# Communication scientifique

## Congrès

1. GDR Ondes (GT2 & GT5), Gif-sur-Yvette, juin 2006, poster.  
<http://gdr-ondes.lss.supelec.fr/>.
2. GDR Ondes (GT2), Marseille, décembre 2006, présentation orale.  
<http://gdr-ondes.lss.supelec.fr/>.
3. Photonic & Electromagnetic Crystal Structures (PECS VII), Monterey, Californie, USA, avril 2007, poster.  
<http://www.pecsconference.org/>.
4. XV<sup>èmes</sup> Journées Nationales Micro-ondes, Toulouse, mai 2007, poster.

## Publications

1. Raphaël Pierre et Boris Gralak, *Appropriate truncation for photonic crystals*, Journal of Modern Optics, volume 55 (juin 2008), numéro 11, pages 1759 à 1770,  
<http://dx.doi.org/10.1080/09500340701799070>.
2. Boris Gralak, Raphaël Pierre, Gérard Tayeb et Stefan Enoch, *Solutions of Maxwell's equations in presence of lamellar gratings including infinitely conducting metal*, Journal of the Optical Society of America A, volume 25 (décembre 2008), numéro 12, pages 3099 à 3110,  
<http://www.opticsinfobase.org/abstract.cfm?URI=josaa-25-12-3099>.
3. Raphaël Pierre, Gérard Tayeb, Boris Gralak et Stefan Enoch, *Quasi-TEM modes in rectangular waveguides : a study based on the properties of PMC and hard surfaces*, Journal of Modern Optics, janvier 2009,  
<http://dx.doi.org/10.1080/09500340802604146>.



## Appropriate truncation for photonic crystals

Raphaël Pierre and Boris Gralak\*

*Institut Fresnel-CNRS (UMR 6133), Marseille, France*

*(Received 27 June 2007; final version received 8 November 2007)*

Effective properties of one-dimensional photonic crystals in the resonance domain are investigated. The obtained analytic expressions of effective permittivity and permeability lead to several results. Firstly, in the case of lossless materials, effective permittivity and permeability take, in general, complex values. It is shown that these values are governed by the truncation of the boundary layer. Considering the particular case of a symmetric unit cell, the effective permittivity and permeability become purely real and, by the way, coherent with physics. Finally, in this case with a symmetric unit cell, we show that effective permittivity and permeability can stay nearly constant in a wide range of wavevectors including propagating and evanescent waves.

**Keywords:** electromagnetic theory; photonic crystal; metamaterial; optics

### 1. Introduction

Metamaterials are composite structures with ‘extra-ordinary’ properties, i.e. with properties different from those of ordinary materials found in nature. For example, metamaterials include ultra-refractive materials with effective index lower than unity [1], as well as negative index materials introduced by Veselago [2]. Important applications are expected from these extraordinary properties. For instance, new directive antennas [3] are based on ultra-refractive materials. Also, new flat lenses [2] with subwavelength resolution [4–7] as well as optical traps [8,9] are based on negative index materials.

These promising applications are based on a first kind of metamaterial consisting of periodic metallic structures operating in the microwave domain. However, due to absorption, the relevance of such metallic structures should decrease when visible domain wavelengths (i.e. smaller than  $1.5\mu\text{m}$ ) are considered. On the other hand, a second kind of metamaterial based on purely dielectric periodic structures, do not suffer from absorption and present interesting properties. For instance, they can mimic ultra-refractive materials [1,8] as well as negative index materials [1,8,10]. Since important applications are expected in the visible domain, this paper is devoted to dielectric periodic structures.

---

\*Corresponding author. Email: [boris.gralak@fresnel.fr](mailto:boris.gralak@fresnel.fr)

In order to understand the behavior of metamaterials, it is convenient to concentrate separately on two phenomena: anomalous refraction, and the effect of the truncation of the boundary layer on reflection and on evanescent wave coupling. Anomalous refraction with photonic crystals is now a well-known phenomenon [1,8]: the model describing this phenomenon is based on the knowledge of the dispersion law and its derivative (i.e. group velocity) inside a photonic crystal considered as an infinite structure. On the other hand, although the effect of truncation of the boundary layer has been noticed and intensively studied [11–14], it is not clearly understood. For instance, to our knowledge, if the truncation of a photonic crystal is modified, then no one can predict the resulting effect on reflection and on evanescent wave coupling. Indeed reflection and evanescent wave coupling have only been studied from a model based on a photonic crystal slab [15,16]. So the resulting description is corrupted by all the resonances associated with the coupling of the two interfaces delimiting the photonic crystal slab. Furthermore, to our knowledge, contrary to the phenomenon of anomalous refraction, reflection properties and the coupling of evanescent waves have not been studied with a model based on an infinite photonic crystal.

In this paper, we consider one-dimensional dielectric periodic structures in order to take advantage of their simplicity which permits the use of a new theoretical method. The aim of this method is to describe all the refraction and reflection properties of a one-dimensional crystal with a single homogeneous layer. In the literature, this homogeneous medium is usually described by a single variable [15,17]: the optical index. Consequently, if different phenomena are considered, then different indices are defined ('refractive index', 'group index', 'phase index', 'reflection index', 'fan index', etc.). Since these indices usually take different values, a single photonic crystal is associated with several different homogeneous media [15,17]. To our knowledge, no single effective homogeneous medium which describes all the refraction and reflection properties of photonic crystals in the resonance domain has ever been proposed in the literature. Following the definition of negative index materials [4], the first natural way to solve this problem was to split the index into two parameters: the permittivity and the permeability. Also, following the shape of the dispersion law, it is natural to consider an anisotropic homogeneous medium: the permittivity and the permeability are tensors [18–20]. Finally, as recently introduced in [21–23], we consider permittivity and permeability which can take complex values. This last consideration is clearly unnatural when there is no absorption in photonic crystals [21,23]. Nevertheless, it is possible if the product of the permittivity with the permeability (and then the index) remains purely real. Indeed, if the imaginary part of the permittivity is negative (corresponding to a gain), then it can be exactly balanced by a positive imaginary part of the permeability (corresponding to absorption) such that the electromagnetic energy is conserved.

This model with anisotropic and complex-valued permittivity  $\varepsilon_a$  and permeability  $\mu_a$  contains several degrees of freedom permitting one to describe several phenomena. In other words, two relationships are needed to obtain analytic expressions of these parameters  $\varepsilon_a$  and  $\mu_a$ . The first one, permitting one to describe the refraction properties, is derived from the dispersion law inside the periodic structure which provides the product  $\varepsilon_a\mu_a$ . The second relationship, permitting one to describe the reflection properties, is derived from the reflection coefficient on a one-dimensional crystal, denoted by  $r_{\#}$  (Figure 1). As a new aspect of the proposed method, the considered  $r_{\#}$  is the reflection

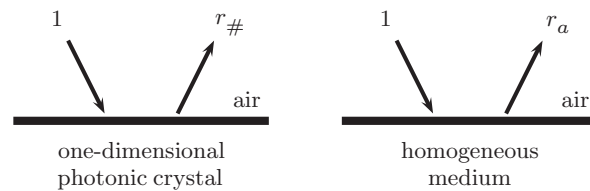


Figure 1. Left: reflection coefficient  $r_{\#}$  on a photonic crystal. Right: reflection coefficient  $r_a$  on a homogeneous medium.

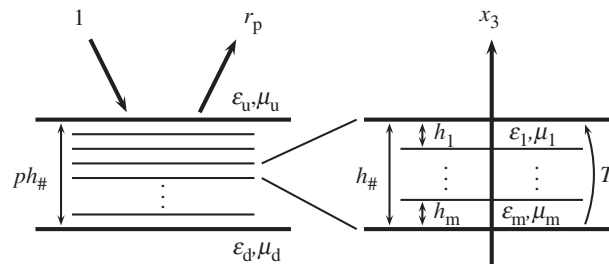


Figure 2. Left: one-dimensional structure made of a stack of  $p$  identical unit cells with thickness  $h_{\#}$ . Right: unit cell made of a stack of  $m$  homogeneous layers with constant permittivity  $\epsilon_j$ , constant permeability  $\mu_j$  and thickness  $h_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ).

coefficient on an infinite photonic crystal [24,25]. So, after the first step providing the product  $\epsilon_a \mu_a$ , this reflection coefficient  $r_{\#}$  is identified with  $r_a$ , the Fresnel reflection coefficient on an anisotropic homogeneous medium (Figure 1). The combination of this identification with the knowledge of the product  $\epsilon_a \mu_a$  provides an analytic expression of effective permittivity  $\epsilon_a$  and permeability  $\mu_a$  of the crystal. From this analytic expression, we first show that the effective permittivity and permeability in general take complex values and are not continuous functions of the wavevector. However, we show that these quantities are purely real in the case where the unit cell of the one-dimensional crystal is symmetric with respect to a horizontal plane. This condition determines the appropriate truncation of the boundary layer. Finally, we show that effective permittivity and permeability present small variations with the wavevectors. In particular, effective properties for evanescent waves can be the same as those for propagating waves.

## 2. Definition of the reflection coefficient on a one-dimensional crystal

The new investigation method presented in this paper is based on the reflection coefficient  $r_{\#}$  on a one-dimensional crystal [24–26]. Such a reflection coefficient has already been defined in the two-dimensional case using the low absorption limit [24]. In this paper, this reflection coefficient is defined as follows [25,26]. Let  $(x_1, x_2, x_3)$  be an orthonormal coordinate system associated with the orthonormal basis  $(e_1, e_2, e_3)$ . We first consider a one-dimensional structure made of  $p$  identical unit cells stacked in the vertical  $x_3$ -direction, each unit cell being in practice a stack of  $m$  homogeneous layers (see Figure 2). This finite-thickness structure is surrounded by two homogeneous and isotropic media: permittivity

1762

*R. Pierre and B. Gralak*

and permeability are  $\varepsilon_u$  and  $\mu_u$  above;  $\varepsilon_d$  and  $\mu_d$  below. Throughout this paper,  $s$ -polarization is considered: the electric field reduces to its parallel component defined as perpendicular to the incident plane (the  $p$ -polarization case can be deduced from this  $s$ -polarization if  $\varepsilon$  and  $\mu$  are permuted together with the electric and magnetic fields). We call  $r_p$  the usual plane-wave reflection coefficient on the structure made of  $p$  identical unit cells. Let this structure be illuminated by an incident harmonic beam field with time dependence in  $\exp(-i\omega t)$  and represented by  $U^i$  defined by

$$U^i(x_{\parallel}, x_3) = \int_{\mathbb{R}} dk_{\parallel} A(k_{\parallel}) \exp[i(k_{\parallel}x_{\parallel} - k_u x_3)]. \quad (1)$$

The resulting reflected beam field  $U_p^r$  can be written

$$U_p^r(x_{\parallel}, x_3) = \int_{\mathbb{R}} dk_{\parallel} A(k_{\parallel}) r_p(k_{\parallel}) \exp[i(k_{\parallel}x_{\parallel} + k_u x_3)], \quad (2)$$

where

$$\begin{aligned} k_u(k_{\parallel}) &= \left( \omega^2 \varepsilon_u \mu_u - k_{\parallel}^2 \right)^{1/2}, & k_{\parallel}^2 < \omega^2 \varepsilon_u \mu_u, \\ k_u(k_{\parallel}) &= i \left( k_{\parallel}^2 - \omega^2 \varepsilon_u \mu_u \right)^{1/2}, & k_{\parallel}^2 \geq \omega^2 \varepsilon_u \mu_u, \end{aligned} \quad (3)$$

expressions in which  $x_{\parallel}$  and  $k_{\parallel}$  stands for the parallel component (i.e. the component included in the plane perpendicular to the  $x_3$ -axis) of, respectively, the position vector and the wavevector. This coefficient  $r_p$  usually used [15,16] has no limit when the number  $p$  tends towards infinity. However, it is possible to define another limit  $r_{\#}$  which can be clearly interpreted as the reflection coefficient on a semi-infinite one-dimensional photonic crystal [25,26]. Indeed, contrary to  $r_p$ , the reflected field  $U_p^r$  has a limit denoted by  $U_{\#}^r$  when  $p$  tends towards infinity. This limit can be written as

$$U_{\#}^r(x_{\parallel}, x_3) = \int_{\mathbb{R}} dk_{\parallel} A(k_{\parallel}) r_{\#}(k_{\parallel}) \exp[i(k_{\parallel}x_{\parallel} + k_u x_3)]. \quad (4)$$

Define the transfer matrix (see Figure 2)

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} = T_1 T_2 \cdots T_m, \quad (5)$$

where  $T_j$  is the transfer matrix associated with the homogeneous layer  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ). The expression of the latter is [9,26]

$$\begin{aligned} T_j &= \begin{bmatrix} \cos(\kappa_j h_j) & \mu_j \kappa_j^{-1} \sin(\kappa_j h_j) \\ -\mu_j^{-1} \kappa_j \sin(\kappa_j h_j) & \cos(\kappa_j h_j) \end{bmatrix}, \\ \kappa_j^2 &= \omega^2 \varepsilon_j \mu_j - k_{\parallel}^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Then, the expression of the coefficient  $r_{\#}$  in Equation (4) is [25,26]

$$r_{\#}(k_{\parallel}) = \frac{\beta_u(k_{\parallel}) - \beta_{\#}(k_{\parallel})}{\beta_u(k_{\parallel}) + \beta_{\#}(k_{\parallel})}, \quad \beta_u = \frac{k_u}{\mu_u}, \quad (7)$$

where the contribution of the crystal, included in the ‘propagation constant’  $\beta_{\#}$  and well separated from  $\beta_u$ , is deduced from the coefficients of the transfer matrix  $T$  defined above (5):

$$\begin{aligned} \beta_{\#} &= \delta T_{12}^{-1}(1 - g^2)^{1/2} + iT_{12}^{-1}s, & \text{if } g^2 < 1, \\ \beta_{\#} &= T_{12}^{-1}(1 - g^2)^{1/2} + iT_{12}^{-1}s, & \text{otherwise,} \\ g &= \frac{(T_{11} + T_{22})}{2}, & s = \frac{(T_{11} - T_{22})}{2}, \end{aligned} \quad (8)$$

where the argument of the complex square root  $(1 - g^2)^{1/2}$  is in  $[0, \pi[$  and  $\delta = \pm$  is the sign of the real part of  $T_{12}$ . Its expression (7) is very elegant since it is similar to the usual Fresnel coefficient. Also, contrary to the coefficient  $r_p$ ,  $r_{\#}$  is independent of the parameters  $\varepsilon_d$  and  $\mu_d$  which characterize the homogeneous medium below.

Note that the expressions (7) and (8) of the reflection coefficient  $r_{\#}$  are valid for any complex-valued  $\varepsilon_j$  and  $\mu_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ). Also it is important to notice that this expression is the same as the one obtained with the low absorption limit [24].

From now on, we restrict ourselves to crystals composed of absorption free dielectric materials. Permittivity and permeability are then purely real and, from (5) or [9], the transfer matrix  $T$  is purely real also. It follows that the propagation constant  $\beta_{\#}$  (8) is purely imaginary in the case  $g^2 \geq 1$ , leading to a reflection coefficient  $r_{\#}$  in Equation (7) with unit modulus if  $k_u$  is real: we fall herein on a well-known result stating that, if the parameter  $|g| = |(T_{11} + T_{22})/2| \geq 1$  then a band gap (or a stop gap) is present [26]. Outside the band gap ( $g^2 < 1$ ), the dispersion law inside the crystal is given by

$$\cos(k_{\#}h_{\#}) = g = \frac{T_{11} + T_{22}}{2}, \quad (9)$$

where  $k_{\#}$  is the vertical component of the wavevector inside the crystal (or Bloch wavevector) [26]. From (8), the propagation constant  $\beta_{\#}$  is in general a complex number with both real and imaginary parts. However, it becomes purely real when the parameter  $s$  vanishes: and this condition is realized if the unit cell of the crystal is invariant under a mirror reflection with respect to a horizontal plane (see Figure 3) [26].

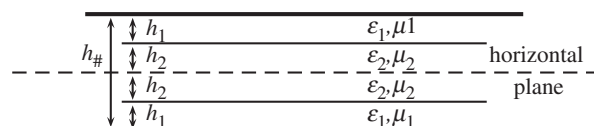


Figure 3. Example of a unit cell invariant under a mirror reflection with respect to the horizontal plane represented by the dashed line. This symmetry implies  $T_{11} = T_{22}$  and  $s = 0$ .

### 3. Definition of the effective homogeneous medium

In order to characterize effective properties of photonic crystals, we model it with a homogeneous and anisotropic medium. Its permittivity and permeability tensors,

$$\varepsilon_a = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\parallel} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\parallel} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\perp} \end{bmatrix}, \quad \mu_a = \begin{bmatrix} \mu_{\parallel} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{\parallel} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\perp} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

which can take *a priori* any complex value, are chosen such that they provide a dispersion law as close as possible to the one inside the crystal (9).

The expression of the Fresnel reflection coefficient  $r_a$  on this anisotropic homogeneous medium is

$$r_a(k_{\parallel}) = \frac{\beta_u(k_{\parallel}) - \beta_a(k_{\parallel})}{\beta_u(k_{\parallel}) + \beta_a(k_{\parallel})}, \quad \beta_a = \frac{k_a}{\mu_{\parallel}}, \quad (11)$$

where  $k_a$  is deduced from the dispersion law

$$k_a^2(k_{\parallel}) + k_{\parallel}^2 \mu_{\parallel} / \mu_{\perp} = \omega^2 \varepsilon_{\parallel} \mu_{\parallel}. \quad (12)$$

Unambiguous definition of the square root for determination of  $k_a$  can be obtained from expression (8) with  $s=0$ ,  $g = \cos(k_a h_a)$  and  $T_{12} = \mu_{\parallel} k_a^{-1} \sin(k_a h_a)$  (the result being independent of  $h_a$ ). The imaginary part of  $k_a$  has to be positive and, in the particular case where it vanishes (i.e.  $k_{\parallel}^2 \mu_{\parallel} / \mu_{\perp} \leq \omega^2 \varepsilon_{\parallel} \mu_{\parallel}$ ),

$$k_a(k_{\parallel}) = \delta_{\mu_{\parallel}} \left( \omega^2 \varepsilon_{\parallel} \mu_{\parallel} - k_{\parallel}^2 \mu_{\parallel} / \mu_{\perp} \right)^{1/2}, \quad (13)$$

where  $\delta_{\mu_{\parallel}} = \pm$  is the sign of the real part of  $\mu_{\parallel}$ . Finally, from expression (12), note that this model remains relevant only for ellipse-shaped dispersion laws.

### 4. Numerical example

To illustrate our results, we consider a simple one-dimensional crystal with an unit cell made of  $m=2$  homogeneous layers:  $h_1 = h_2 = h_{\#}/2$ ,  $(\varepsilon_1/\varepsilon_0)^{1/2} = 1.5$  (for  $\text{SiO}_2$ ),  $(\varepsilon_2/\varepsilon_0)^{1/2} = 3.4$  (for Si) and  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$  ( $\varepsilon_0$  and  $\mu_0$  are the vacuum permittivity and permeability,  $c = 1/(\varepsilon_0 \mu_0)^{1/2}$ ). The dispersion law inside this structure is represented in Figure 4. At normalized frequency  $\omega h_{\#}/(2\pi c) = 0.462$ , the dispersion diagram inside the crystal is close to an ellipse in the range  $k_{\parallel} h_{\#}/(2\pi) \in [-0.5, 0.5]$  (Figure 4, right). It is well known [1] that the crystal behaves as an ultra-refractive metamaterial since the radii of the ellipse on Figure 4 are below this normalized frequency. It can be well approached by the dispersion law (12) inside the homogeneous and anisotropic medium. Denoting by  $K_{\parallel}$  and

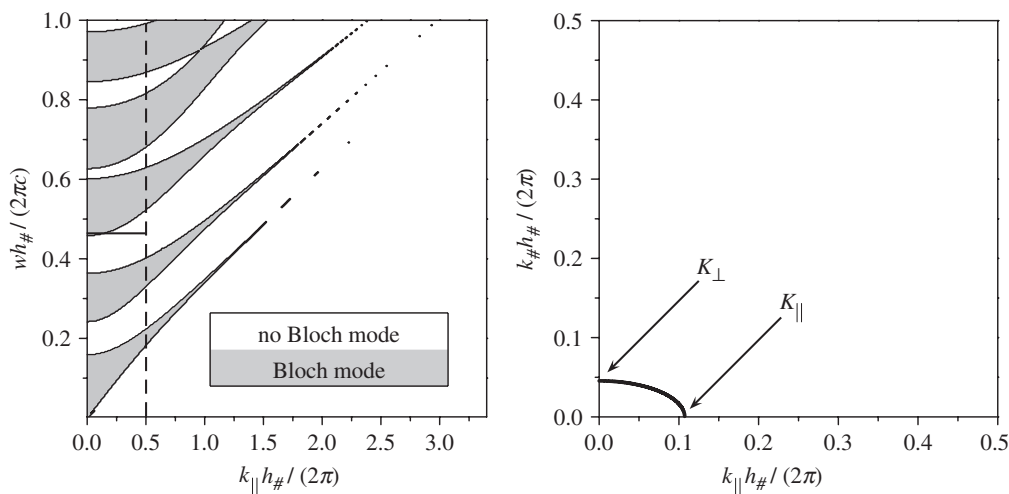


Figure 4. Left: dispersion law inside the crystal. Right: dispersion diagram at the normalized frequency  $\omega h_{\#}/(2\pi c) = 0.462$  corresponding to the horizontal line on the left.

$K_{\perp}$  the length of the semi-axes of this ellipse (Figure 4, right), one obtains permeabilities  $\mu_{\perp}$  and  $\mu_{\parallel}$  as functions of  $\varepsilon_{\parallel}$ :

$$\begin{aligned}\mu_{\perp} &= \frac{K_{\parallel}^2}{\omega^2 \varepsilon_{\parallel}}, & \frac{K_{\parallel} h_{\#}}{2\pi} &\approx 0.107, \\ \mu_{\parallel} &= \frac{K_{\perp}^2}{\omega^2 \varepsilon_{\parallel}}, & \frac{K_{\perp} h_{\#}}{2\pi} &\approx 0.0455.\end{aligned}\quad (14)$$

So the use of the dispersion law provides the knowledge of the products  $\mu_{\perp} \varepsilon_{\parallel}$  and  $\mu_{\parallel} \varepsilon_{\parallel}$  in this particular case. Combining this with the identification  $r_{\#}(k_{\parallel}) = r_a(k_{\parallel})$  [or  $\beta_{\#}(k_{\parallel}) = \beta_a(k_{\parallel})$ ] of reflection coefficients provides an analytic expression of effective permittivity as a function of  $k_{\parallel}$ :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\parallel}(k_{\parallel}) &= \frac{K_{\perp} K_{\parallel}}{\omega^2} \beta_{\#}(k_{\parallel}) \left[ K_{\parallel}^2 - k_{\parallel}^2 \right]^{-1/2}, & k_{\parallel}^2 < K_{\parallel}^2, \\ \varepsilon_{\parallel}(k_{\parallel}) &= \frac{K_{\perp} K_{\parallel}}{i\omega^2} \beta_{\#}(k_{\parallel}) \left[ k_{\parallel}^2 - K_{\parallel}^2 \right]^{-1/2}, & k_{\parallel}^2 \geq K_{\parallel}^2.\end{aligned}\quad (15)$$

Note that, in the considered range  $k_{\parallel} h_{\#}/(2\pi) \in [-0.5, 0.5]$ , identification of the two dispersion diagrams implies relation  $k_{\parallel}^2 < K_{\parallel}^2 \iff g^2 < 1$ . We recall that, inside the band gap ( $g^2 \geq 1$ ), the propagation constant  $\beta_{\#}$  given by (8) is purely imaginary and the effective permittivity  $\varepsilon_{\parallel}$  is then purely real. However, outside the band gap ( $g^2 < 1$ ), the propagation constant  $\beta_{\#}$  need not to be purely real. Consequently, we obtain the surprising result stating that the effective permittivity  $\varepsilon_{\parallel}$  is not purely real for a crystal without absorption. Of course, from (14), the permittivity and permeabilities are such that the products  $\varepsilon_{\parallel} \mu_{\perp}$  and  $\varepsilon_{\parallel} \mu_{\parallel}$  are both real and positive.

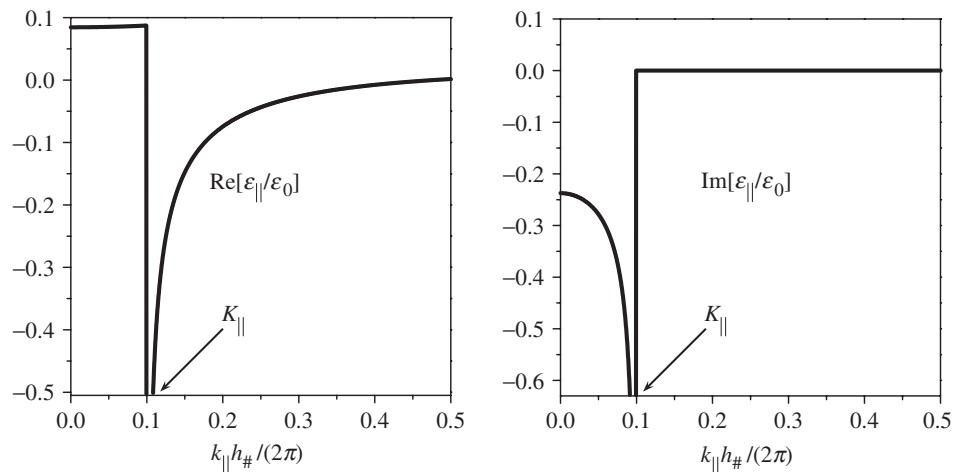


Figure 5. Real and imaginary parts of the effective permittivity  $\epsilon_{\parallel}$  when the unit cell is made of two layers.

Figure 5 shows real and imaginary parts of the effective permittivity in the considered example as a function of  $k_{\parallel}$ . By definition, these values of the effective permittivity [and the corresponding permeability (14)] enable us to describe for each value of  $k_{\parallel}$  the refraction and reflection properties of the one-dimensional periodic structure. However, the presence of the imaginary part as well as the  $k_{\parallel}$ -dependence (including discontinuities) lead us to consider that the crystal cannot be replaced by a homogeneous anisotropic medium in this case. Indeed, the function represented on Figure 5 cannot be reasonably replaced by a single constant number. Note that, if the only normal incidence ( $k_{\parallel} = 0$ ) is considered as in [23], then our model is always able to associate effective permittivity and permeability with the one-dimensional crystal. Contrary to the results presented in [23], there is no condition on the symmetry of the structure or on the (long) wavelength, so our model appears to be the most general.

## 5. Determination of the appropriate truncation

From our analysis of expression (8) for the propagation constant  $\beta_{\#}$ , the imaginary part of effective permittivity  $\epsilon_{\parallel}$  outside the band gap emerges with a non-vanishing parameter  $s$ . Our analytical calculations show that the solution to obtain a purely real effective permittivity is then to consider a crystal with a unit cell symmetric with respect to a horizontal plane (see Figure 3). In other words, for the considered crystal, a solution is to choose a truncation at the middle of the first or the second layer. For example, we consider now a unit cell made of  $m=3$  homogeneous layers:  $h_1 = h_3 = h_{\#}/4$ ,  $h_2 = h_{\#}/2$ ,  $(\epsilon_1/\epsilon_0)^{1/2} = (\epsilon_3/\epsilon_0)^{1/2} = 1.5$ ,  $(\epsilon_2/\epsilon_0)^{1/2} = 3.4$  and  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_0$ . Resulting values for the effective permittivity and permeability are represented on Figure 6. In this symmetric case, effective permittivity and permeabilities are purely real and present



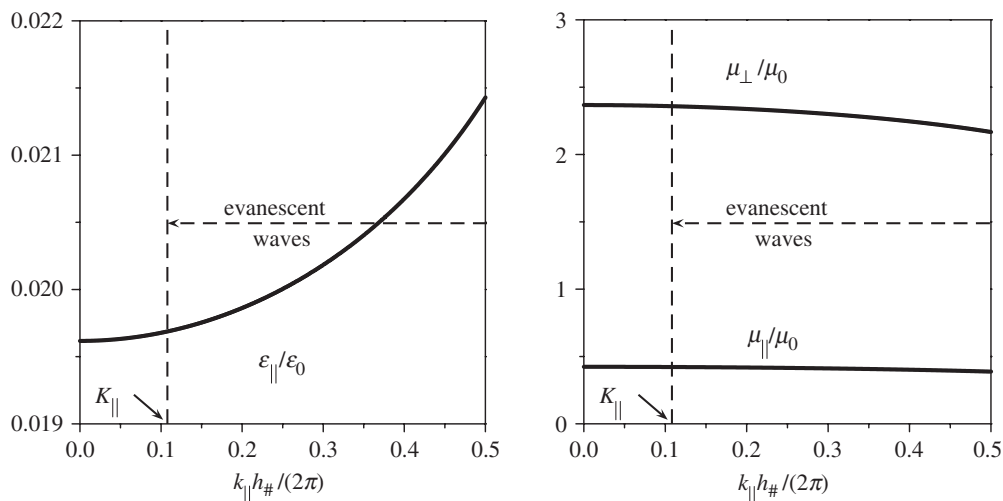


Figure 6. Effective permittivity  $\epsilon_{||}$  and permeabilities  $\mu_{||}, \mu_{\perp}$  when the unit cell is symmetric.

relative variations under 10% for this  $k_{||}$ -range around five times wider than the one restricted to propagating waves.

Here, we definitively show that effective permittivity and permeability depend on the truncation of the boundary layer. And, as it is claimed in [27], we found that both permittivity and permeability cannot be solely determined from the dispersion law since the latter does not depend on the truncation of the boundary layer. Also, it has to be noticed that the appropriate truncation which we have determined is different from the one presented in [23]. In our case, the unit cell is required to be symmetric while in [23], only the whole crystal is required to be symmetric. The reason is that these symmetries are introduced for different reasons. In the case of the model presented in [23], the symmetry is introduced in order to obtain effective parameters independent of the thickness. In the case of our model, the effective parameters are always independent of the thickness (the only condition being this thickness has to be large enough) and the symmetric unit cell is introduced to avoid the discontinuity and imaginary part of the effective parameters. This difference between our conclusion and the one presented in [23] may be understood recalling that our expressions can be obtained using the low absorption limit [24]. In such a case, the transmitted electromagnetic field through a stack made of  $p$  unit cells is vanishing when this number  $p$  tends toward infinity. Consequently, the electromagnetic field does not meet the lower interface of the stack (as well as the substrate since the expression (7) of  $r_{\#}$  is independent of  $\epsilon_d$  and  $\mu_d$ ). The electromagnetic field only meets the top interface and the unit cells below this top interface and thus the symmetry of the only initial unit cell can have an effect. In particular, if the whole stack is symmetric with respect to a horizontal plane but does not contain an integer number of unit cells as proposed in [23], then the electromagnetic field meets a non-symmetric initial unit cell leading to discontinuous and complex-valued effective permittivity and permeability. In this case we conclude that it is not possible to describe all the refraction and reflection properties of a one-dimensional crystal with a single homogeneous layer.

## 6. Comparison with a finite-thickness structure

Finally, we check that our model is able to describe real finite-thickness structures. We consider a structure made of  $p = 256$  unit cells which are the same as in the previous examples. This structure is surrounded by air (the permittivity and permeability above and below are  $\varepsilon_u = \varepsilon_d = \varepsilon_0$  and  $\mu_u = \mu_d = \mu_0$ ) and is illuminated by a Gaussian beam field  $U_i$  defined by Equation (1) with the amplitude

$$A(k_{\parallel}) = \frac{W}{2\pi^{1/2}} \exp[(k_{\parallel} - k_0)^2 W^2/4], \quad (16)$$

where the normalized frequency is  $\omega h_{\#}/(2\pi c) = 0.462$ , the incident angle is  $\theta_0 = 10^\circ$ , the average parallel component of the incident wavevector is  $k_0 = (\omega/c) \sin \theta_0$  and the width  $W = 40h_{\#}$ . The normalization is such that the maximum of this incident beam field is equal to unity. Figure 7 shows the square of the modulus of the field in the presence of the finite-thickness structure. The refraction angle at the interfaces separating the stack and the surrounding medium is clearly corresponding to an ultra-refraction phenomenon [1] as it can be predicted from the dispersion diagram of Figure 4. The reflectivity is 74% in the case of the non-symmetric unit cell (Figure 7(a)) and 53% in the case of the symmetric unit cell (Figure 7(b)).

In order to compare these results with the predictions from our model, we focus on the parallel component of the wavevector corresponding to this incident beam field whose value is  $k_{\parallel} h_{\#}/(2\pi) = \omega h_{\#}/(2\pi c) \sin \theta_0 = 0.0802$ . Considering first the non-symmetric case, the value of the effective permittivity and permeability are deduced from Figure 5 and Equation (14):

$$\varepsilon_{\parallel} = 0.086 - i0.416, \quad \mu_{\perp} = 0.256 + i1.24, \quad \mu_{\parallel} = 0.00462 + i0.0224. \quad (17)$$

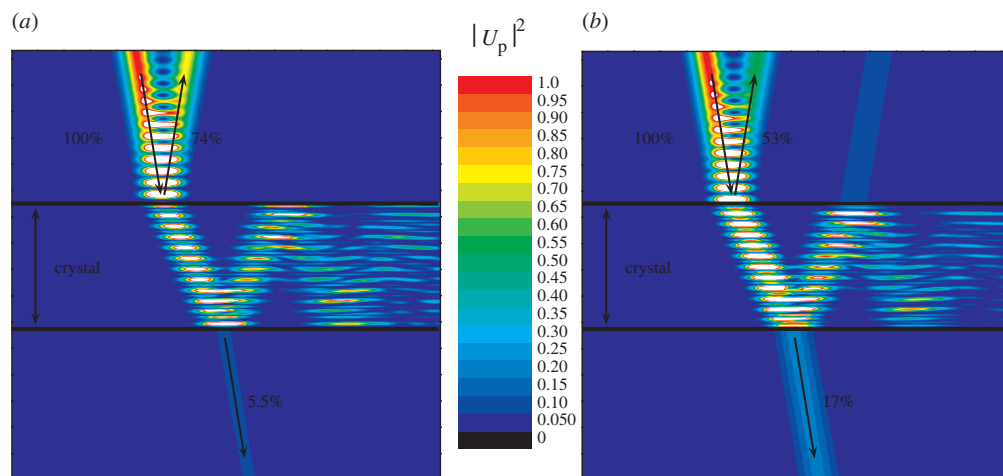


Figure 7. Square of the modulus of the field  $U_p = U^i + U_p^r$  with the number of unit cells  $p = 256$ . (a) The unit cell is the same as in the case of Figure 5 (non-symmetric unit cell). (b) The unit cell is the same as in the case of Figure 6 (symmetric unit cell). (The colour version of this figure is included in the online version of the journal.)

The resulting reflectivity  $|r_a|^2$ , deduced from Equations (11) and (12), is equal to 77.7%. Concerning the symmetric case, the value of the effective parameters are deduced from Figure 6 and Equation (14):

$$\varepsilon_{\parallel} = 0.0197, \quad \mu_{\perp} = 2.36, \quad \mu_{\parallel} = 0.422, \quad (18)$$

and the resulting reflectivity  $|r_a|^2$  is now equal to 53%. In both cases, a good agreement is obtained between the numerical simulations for a finite-thickness structure and our model based on an infinite structure.

## 7. Conclusion

We have shown that effective permittivity and permeability of a one-dimensional crystal without absorption are in general complex. As a main result of this paper, we have shown analytically that, if the unit cell of the crystal is symmetric, then this contradiction disappears since these effective permittivity and permeability become purely real. To our knowledge, this result is the first clearly proven effect of the truncation of the boundary layer. Finally, from our numerical results, effective permittivity and permeability present small variations over a wide range of wavevectors including propagating and evanescent waves. Thus, we have rigorously found the first appropriate conditions permitting a description of all the refraction and reflection properties of a one-dimensional crystal with a single homogeneous layer. We think that it is reasonable to conjecture that our new method as well as our new results can be extended to the two- and three-dimensional crystals where important phenomena and applications are expected.

## Acknowledgements

Thanks are due to Brian Stout and Anne Sentenac for carefully reading the manuscript. This work was partly supported by the research program METAPHORE (AC nanosciences et nanotechnologies of the French Ministère de la Recherche et des Nouvelles Technologies), the EC-funded projects PHOREMOST (FP6/2003/IST/2-511616) and the project FANI of the ANR-funded program PNANO (Agence Nationale de la Recherche).

## References

- [1] Gralak, B.; Enoch, S.; Tayeb, G. *J. Opt. Soc. Am. A* **2000**, *17*, 1012–1020.
- [2] Veselago, V.G. *Sov. Phys. Usp.* **1968**, *10*, 509–514.
- [3] Enoch, S.; Tayeb, G.; Sabouroux, P.; Guérin, N.; Vincent, P. *Phys. Rev. Lett.* **2002**, *89*, 213902-1–4.
- [4] Pendry, J.B. *Phys. Rev. Lett.* **2000**, *85*, 3966–3969.
- [5] Smith, D.R.; Padilla, W.J.; Vier, D.C.; Nemat-Nasser, S.C.; Schultz, S. *Phys. Rev. Lett.* **2000**, *84*, 4184–4187.
- [6] Shelby, R.A.; Smith, D.R.; Schultz, S. *Science* **2001**, *292*, 77–79.
- [7] Wiltshire, M.C.K.; Pendry, J.B.; Young, I.R.; Larkman, D.J.; Gilderdale, D.J.; Hajnal, J.V. *Science* **2001**, *291*, 849–851.
- [8] Notomi, M. *Phys. Rev. B* **2000**, *62*, 10696–10705.
- [9] Guenneau, S.; Gralak, B.; Pendry, J. *Opt. Lett.* **2005**, *30*, 1204–1206.

1770

R. Pierre and B. Gralak

- [10] Cubukcu, E.; Aydin, K.; Ozbay, E.; Foteinopoulou, S.; Soukoulis, C.M. *Nature* **2003**, *423*, 604–605.
- [11] Xiao, S.; Qiu, M.; Ruan, Z.; He, S. *Appl. Phys. Lett.* **2004**, *85*, 4269–4271.
- [12] Moussa, R.; Foteinopoulou, S.; Zhang, L.; Tuttle, G.; Guven, K.; Ozbay, E.; Soukoulis, C.M. *Phys. Rev. B* **2005**, *71*, 085106-1–5.
- [13] Zhang, X. *Phys. Rev. B* **2005**, *71*, 165116-1–7.
- [14] Ramos-Mendieta, F.; Halevi, P. *Phys. Rev. B* **1999**, *59*, 15112–15120.
- [15] Schwartz, B.T.; Piestun, R. *J. Opt. Soc. Am. B* **2005**, *22*, 2018–2026.
- [16] Luo, C.; Johnson, S.G.; Joannopoulos, J.D.; Pendry, J.B. *Phys. Rev. B* **2003**, *68*, 045115-1–15.
- [17] Kosaka, H.; Tomita, A.; Kawashima, T.; Sato, T.; Kawakani, S. *Phys. Rev. B* **2000**, *62*, 1477–1480.
- [18] Datta, S.; Chan, C.T.; Ho, K.M.; Soukoulis, C.M. *Phys. Rev. B* **1993**, *48*, 14936–14943.
- [19] Halevi, P.; Krokhin, A.; Arriaga, J. *Phys. Rev. Lett.* **1999**, *82*, 719–722.
- [20] Efros, A.L.; Pokrovsky, A.L. *Solid State Commun.* **2004**, *129*, 643–647.
- [21] Koschny, T.; Markoš, P.; Smith, D.R.; Soukoulis, C.M. *Phys. Rev. E* **2003**, *68*, 065602-1–4.
- [22] Smith, D.R.; Vier, D.C.; Koschny, T.; Soukoulis, C.M. *Phys. Rev. E* **2005**, *71*, 036617-1–11.
- [23] Koschny, T.; Markoš, P.; Economou, E.N.; Smith, D.R.; Vier, D.C.; Soukoulis, C.M. *Phys. Rev. B* **2005**, *71*, 245105-1–22.
- [24] Botten, L.C.; Nicorovici, N.A.; McPhedran, R.C.; Martijn de Sterke, C.; Asatryan, A.A. *Phys. Rev. E* **2001**, *64*, 046603-1–18.
- [25] Bouchitté, G.; Felbacq, D.; Zolla, F. *Wave Motion* **2005**, *42*, 75–95.
- [26] Gralak, B. Etude Théorique et Numérique Des Propriétés Des Structures à Bandes Interdites Photoniques. Ph.D. Thesis, Université d'Aix-Marseille III, 2001.
- [27] Decoopman, T.; Tayeb, G.; Enoch, S.; Maystre, D.; Gralak, B. *Phys. Rev. Lett.* **2006**, *97*, 073905.

# Solutions of Maxwell's equations in presence of lamellar gratings including infinitely conducting metal

Boris Gralak,\* Raphaël Pierre, Gérard Tayeb, and Stefan Enoch

Institut Fresnel-CNRS (UMR 6133), faculté de Saint Jérôme, 13397 Marseille cedex 20, France

\*Corresponding author: boris.gralak@fresnel.fr

Received June 16, 2008; revised September 18, 2008; accepted September 25, 2008;  
posted October 13, 2008 (Doc. ID 97341); published November 25, 2008

Modal methods often used to model lamellar gratings that include infinitely or highly conducting metallic parts encounter numerical instabilities in some situations. In this paper, the origin of these numerical instabilities is determined, and then a stable algorithm solving this problem is proposed. In order to complete this analysis, the different geometries that can be handled without numerical instabilities are clearly defined. Numerical tests of the exact modal method implemented with the proposed solution are also presented. A test of convergence shows the efficiency of the method while the comparison with the fictitious sources method shows its accuracy. © 2008 Optical Society of America  
OCIS codes: 050.2770, 050.1755.

## 1. INTRODUCTION

The exact method was proposed in 1981 to solve Maxwell's equations in the presence of lamellar gratings [1–3]. This method relies on the expansion of the electromagnetic field using an “exact eigenfunctions basis” for which an exact representation of the permittivity is available. Consequently, it appears more efficient than the usual coupled-wave method [4] based on the use of a Fourier expansion that leads to poor convergence because of the discontinuous nature of both the electromagnetic field and the permittivity. When metallic materials are considered, the permittivity contrast is important, and the exact modal method is definitely a better alternative solution.

Motivations for studying lamellar metallic gratings are numerous. Periodic metallic structures are good candidates for extraordinary transmission [5,6], compact antennas [7], modified local density of states [8–10], negative index materials [11,12], etc. However, the use of the exact modal method (as well as the coupled-wave method) leads to numerical instabilities, even if  $S$  or  $R$  algorithms [13]—as well as modified  $S$  algorithms (also called the Fresnel formulation [14])—are implemented.

In this paper, we show how to obtain a large class of solutions of Maxwell's equations in the presence of lamellar gratings that include infinitely conducting metal. We extend the method presented in [15,16] in order to obtain a suitable model for metallic structures. We show that the numerical instabilities are due to a noninvertible matrix corresponding to the change from a first basis to a second basis, both with different supports. From our analysis, we show that the solution of this numerical problem is precisely the algorithm used in [17] whence we can define the structures that can be modeled without numerical instabilities. Finally, we present numerical examples to show that our solution is appropriate. A convergence test shows

that the method converges rapidly and is stable. In addition, a comparison of a field map with the fictitious-sources method shows perfect agreement.

## 2. DEFINITIONS AND NOTATIONS

In this paper, we show how to obtain solutions  $\mathbf{E}_\omega$  of the Helmholtz equation

$$[\omega^2 - \epsilon^{-1} \nabla \times \mu_0^{-1} \nabla \times] \mathbf{E}_\omega = \mathbf{0}, \quad (1)$$

where  $\nabla \times$  is the curl operator,  $\omega$  is the frequency (real number),  $\epsilon$  is the permittivity and  $\mu_0$  is the vacuum permeability. The function  $\epsilon$  is well-defined for linear (eventually dispersive and absorptive) dielectric materials, and, in domains with infinitely conducting metal, the electric field is null. In order to obtain a first-order differential equation from Eq. (1), we define

$$\mathbf{H}_\omega = (\omega \mu_0)^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_\omega. \quad (2)$$

Equation (1) is then equivalent to the set of first-order equations

$$\mathbf{E}_\omega = (\omega \epsilon)^{-1} \nabla \times \mathbf{H}_\omega, \quad \mathbf{H}_\omega = (\omega \mu_0)^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_\omega. \quad (3)$$

If  $\mathbf{E}_\omega$  stands for the harmonic electric field, the quantity  $\mathbf{H}_\omega$  is then proportional to the usual harmonic magnetic field (the coefficient being the complex number  $i$ ).

While Eqs. (1) and (3) are satisfied in linear dielectric materials only, the definition of the magnetic field (2) is satisfied everywhere. We can compile these two different behaviors by defining the characteristic function

$$\Psi = \begin{cases} 1 & \text{in dielectric materials} \\ 0 & \text{in infinitely conducting metal} \end{cases}. \quad (4)$$

Thus, the equations we propose to solve can be reduced to

$$\mathbf{E}_\omega = \Psi(\omega\epsilon)^{-1} \nabla \times \mathbf{H}_\omega, \quad \mathbf{H}_\omega = (\omega\mu_0)^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_\omega. \quad (5)$$

Concerning the geometry, we focus on lamellar gratings that include infinitely conducting metal. Throughout, an orthonormal basis  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  is used, such that every vector  $\mathbf{x}$  in  $\mathbb{R}^3$  is described by its three components  $x_1, x_2, x_3$ . The structure we consider is independent of the variable  $x_2$ , periodic with respect to the variable  $x_1$ , and with spatial period  $\mathbf{d} = d\mathbf{e}_1$ :

$$\epsilon(\mathbf{x} + \mathbf{d}) = \epsilon(\mathbf{x}) = \epsilon(x_1, x_3), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (6)$$

The unit cell associated with this grating is  $[0, d]$  and the one-dimensional lattice is  $\{n\mathbf{d} | n \in \mathbb{Z}\}$ . Then, a lamellar grating is a stack in the direction  $x_3$  of layers in which  $\epsilon$  is a function of the single variable  $x_1$  (see Fig. 1). In practice, each layer comprises infinite parallel rods with rectangular cross section (see Fig. 2): the function  $\epsilon$  is piecewise constant.

The exact modal method for solving Maxwell's equations in lamellar gratings made of dielectrics is already detailed in our previous paper [16]. In this paper, in a first step, each layer is considered separately and, at the end of this first step, we obtain an elementary  $R$  matrix associated with each layer. In a second step, an  $R$  matrix associated with a stack of layers is obtained from the  $R$  algorithm [13] and all the elementary  $R$  matrices.

Similarly, in the present paper we focus, in a first step, on a single layer that includes infinitely conducting metal. From [16], it is enough to obtain the elementary  $R$  matrix associated with such a layer. For the sake of simplicity, we first consider a layer made of two rods per unit cell similar to the one represented on Fig. 2: it is located between the two horizontal planes defined by equations  $x_3 = 0$  and  $x_3 = h$ . The first rod is made of dielectric material with dielectric constant  $\epsilon_a$  and width  $a$ , and the second rod is made of infinitely conducting metal (its width is  $d - a$ ). Thus, defining the characteristic function

$$\Psi_a(x_1) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x_1 + pd \leq a \\ 0 & a < x_1 + pd < d \end{cases}, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad (7)$$

Eqs. (5) restricted to the domain  $0 \leq x_3 \leq h$  become

$$\mathbf{E}_\omega = \Psi_a(\omega\epsilon_a)^{-1} \nabla \times \mathbf{H}_\omega, \quad \mathbf{H}_\omega = (\omega\mu_0)^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_\omega. \quad (8)$$

In Appendix A, it is shown that we can restrict ourselves to an electromagnetic field  $\mathbf{G}_\omega = \mathbf{E}_\omega, \mathbf{H}_\omega$  that satisfies the partial Bloch boundary condition

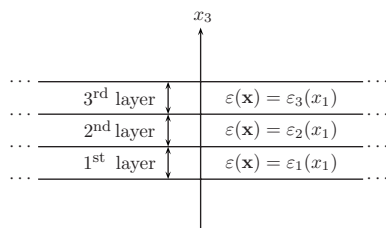


Fig. 1. Lamellar grating made of three layers.

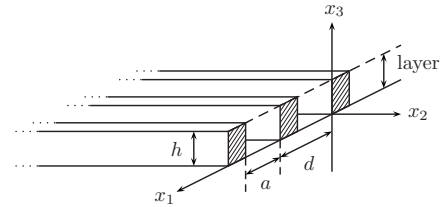


Fig. 2. Layer made of two rods per unit cell. First rod has width  $a$  and dielectric constant  $\epsilon_a$ . Second rod (shaded domain) has width  $d - a$  and is made of infinitely conducting metal; thickness of the layer is  $h$ .

$$\mathbf{G}_\omega(x_1 + d, x_2, x_3) = \exp[ik_1 d] \mathbf{G}_\omega(x_1, x_2, x_3),$$

$$x_1, k_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \quad (9)$$

with the  $x_2$  dependence

$$\mathbf{G}_\omega(x_1, x_2, x_3) = \hat{\mathbf{G}}_\omega(x_1, k_2, x_3) \exp[ik_2 x_2],$$

$$x_1, x_2, k_2, x_3 \in \mathbb{R}. \quad (10)$$

The resulting reduced unknowns  $\hat{\mathbf{E}}_\omega$  and  $\hat{\mathbf{H}}_\omega$  are, for all  $x_3$  in  $\mathbb{R}$ , elements of the Hilbert space  $\mathcal{H}(k_1)$ , the space of square integrable functions on the domain  $[0, d]$  of Eq. (A5) with the partial Bloch boundary condition (9).

### 3. TRANSFER MATRIX METHOD

In the following presentation of our numerical method, we will often use two- and four-component vectors (and then  $2 \times 2$  and  $4 \times 4$  matrices) in order to obtain compact notations containing all the electromagnetic field components which have to be taken into account.

The considered transfer matrix formalism is associated with the propagation variable  $x_3$  [16]. In this formalism, the vector containing the tangential components of the reduced unknowns  $\hat{\mathbf{E}}_\omega$  and  $\hat{\mathbf{H}}_\omega$ ,

$$F = \begin{bmatrix} F^{(1)} \\ F^{(2)} \end{bmatrix}, \quad F^{(j)} = \begin{bmatrix} \hat{E}_{\omega,j} \\ \hat{H}_{\omega,j} \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \quad (11)$$

is considered a function of the variable  $x_3$ . As a consequence, although this vector-valued function  $F$  depends on the two variables  $x_1$  and  $x_3$ , the  $x_1$  dependence will not appear in the following equations.

To allow focus on the main result of this paper, we report in Appendix B the details leading to the solution in the considered layer of Fig. 2. In particular, the modal basis  $\{\Phi_{a,n} | n \in \mathbb{N}\}$  is determined by Eq. (B9) in order to obtain the modal expansion of the field

$$F(x_3) = \sum_{n \in \mathbb{N}} F_{a,n}(x_3) \Phi_{a,n}, \quad (12)$$

where the coefficients  $F_{a,n}(x_3)$  are given by Eq. (B12). From this expansion, the relationships between the vectors  $F(0)$  and  $F(h)$  can be expressed with transfer matrix (B17) or  $R$  matrix (B19). More stable numerically, the  $R$  matrix is then used in the corresponding stacking algorithm.



Gralak *et al.*

Vol. 25, No. 12/December 2008/J. Opt. Soc. Am. A 3101

Now, suppose that there is a second homogeneous layer with  $\epsilon = \epsilon_0$ ,  $\mu = \mu_0$  and located between the planes  $x_3 = h$  and  $x_3 = h + h_0$  (see Fig. 3).

In Appendix C, we show how the electromagnetic field can be expanded in the Fourier basis  $\{\Phi_{0,p} | p \in \mathbb{Z}\}$  [Eq. (C2)] in the homogeneous layer

$$F(x_3) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} F_{0,p}(x_3) \Phi_{0,p}, \quad (13)$$

where the coefficients  $F_{0,p}(x_3)$  are given by Eq. (C6). Similarly, from this expansion, the relationships between the vectors  $F(h)$  and  $F(h + h_0)$  can be expressed with  $R$  matrix (C8).

At this stage, if one uses the usual  $R$  algorithm to obtain the  $R$  matrix of the stack of the two layers, then numerical instabilities will appear. In Section 4, we present our analysis and solution of this problem.

#### 4. FROM THE FOURIER BASIS TO THE MODAL BASIS

##### A. Field Continuity at the Interface Separating a Lamellar Layer from a Homogeneous One

The interface separating the two considered layers is located at  $x_3 = h$  (Fig. 3). Just below this interface at  $x_3 = h^-$ , the electromagnetic field is expanded on the modal basis (12), and just above at  $x_3 = h^+$ , the field is expanded on the Fourier basis (13). Then the expression of the field continuity at this interface requires one to change the expansion basis from the modal basis to the Fourier basis.

Let  $E$  and  $H$  be the two-component vectors containing, respectively, the electric and magnetic part of the vector  $F$ : from Eq. (11),

$$\begin{aligned} E &= P^E F, \quad P^E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ H &= P^H F, \quad P^H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (14)$$

The “modal” and Fourier coefficients associated with these vectors are defined from those of  $F$  in Eqs. (12) and (13) [see Eq. (B12) in Appendix B and Eq. (C6) in Appendix C for more details of the definition of the coefficients of  $F$ ]:

$$E_{a,n}(x_3) = P^E F_{a,n}(x_3), \quad H_{a,n}(x_3) = P^H F_{a,n}(x_3), \quad n \in \mathbb{N},$$

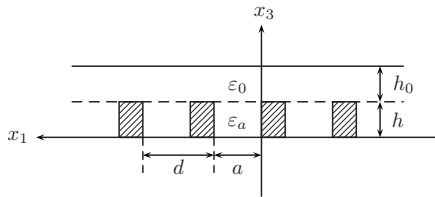


Fig. 3. Stack of a homogenous layer and the layer represented on Fig. 2. The interface delimiting these two layers is represented by the dashed line at  $x_3 = h$ .

$$E_{0,p}(x_3) = P^E F_{0,p}(x_3), \quad H_{0,p}(x_3) = P^H F_{0,p}(x_3), \quad p \in \mathbb{Z}. \quad (15)$$

Note that the “modal” coefficients are identified by the subscript  $a$  [see Eq. (12)] and the Fourier coefficients by the subscript 0 [see Eq. (13)]. These (two-component) coefficients are collected in the vectors  $E_0$ ,  $H_0$ ,  $E_a$ , and  $H_a$  representing the electric and magnetic components of the field  $F$ :

$$\begin{aligned} G_0(x_3) &= [\cdots, G_{a,-1}(x_3), G_{a,0}(x_3), G_{a,1}(x_3), \cdots, G_{a,p}(x_3), \cdots], \\ G_a(x_3) &= [G_{a,0}(x_3), G_{a,1}(x_3), \cdots, G_{a,n}(x_3), \cdots], \quad G = E, H. \end{aligned} \quad (16)$$

From the continuity relationship established in Appendix A, the continuity condition at  $x_3 = h$  can be written

$$E(x_1, h^-) = E(x_1, h^-) \Psi_a(x_1) = E(x_1, h^+),$$

$$H(x_1, h^-) \Psi_a(x_1) = H(x_1, h^+) \Psi_a(x_1), \quad 0 \leq x_1 \leq d. \quad (17)$$

After expanding the electromagnetic field on the modal [Eq. (B9)] and Fourier [Eq. (C2)] bases, this continuity condition becomes, for the coefficients in Eq. (15),

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}} \Phi_{a,n}^{(1)} E_{a,n}(h^-) &= \Psi_a \sum_{n \in \mathbb{N}} \Phi_{a,n}^{(1)} E_{a,n}(h^-) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \phi_{0,p} E_{0,p}(h^+), \\ \Psi_a \sum_{n \in \mathbb{N}} \Phi_{a,n}^{(2)} H_{a,n}(h^-) &= \Psi_a \sum_{p \in \mathbb{Z}} \phi_{0,p} H_{0,p}(h^+), \quad 0 \leq x_1 \leq d. \end{aligned} \quad (18)$$

*A priori* we can use two different bases (the modal or the Fourier basis) to express this condition as a linear algebraic equation. However, the continuity of the electric field components implies a condition for all  $x_1$  in  $[0, d]$ , while the continuity of the magnetic field components implies a condition for all  $x_1$  in  $[0, a]$  only. Consequently, the continuity of the electric field components has to be expressed by projection on the Fourier basis since the modal basis, cannot impose a condition for  $x_1$  in  $[a, d]$ . On the other hand, the magnetic field components can be expressed using the Fourier basis as well as the modal basis. So, for the vectors  $E_0$ ,  $H_0$ ,  $E_a$ , and  $H_a$  in Eq. (16), these continuity conditions become

$$W_{0,a}^{(1)} E_a(h^-) = E_0(h^+),$$

$$W_{0,a}^{(2)} H_a(h^-) = U_a H_0(h^+) \Leftrightarrow H_a(h^-) = W_{a,0}^{(2)} H_0(h^+), \quad (19)$$

where  $W_{0,a}^{(j)}$ ,  $W_{a,0}^{(j)}$ , and  $U_a$  are, respectively, the matrices with the  $2 \times 2$  coefficients

$$[W_{0,a}^{(j)}]_{p,n} = \int_{[0,d]} dx_1 \overline{\phi_{0,p}(x_1)} \Phi_{a,n}^{(j)}(x_1),$$

$$p \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad j = 1, 2,$$

$$\begin{aligned}
[W_{a,0}^{(j)}]_{n,p} &= \int_{[0,d]} dx_1 \Phi_{a,n}^{(j)}(x_1) \phi_{0,p}(x_1), \\
n \in N, \quad p \in Z, \quad j &= 1, 2, \\
[U_a]_{p,q} &= \int_{[0,d]} dx_1 \overline{\phi_{0,p}(x_1)} \Psi_a(x_1) \phi_{0,q}(x_1) I, \\
p \in Z, \quad q \in Z.
\end{aligned} \quad (20)$$

### B. Origin of Numerical Instabilities

The difficulty of numerical instabilities arises from the fact that the set of plane-wave functions (C2) is a basis for functions on the interval  $[0, d]$  while the sets of the modal functions (B3) and (B8) are bases for functions on the interval  $[0, a]$ . Consequently, it is possible to develop a modal function  $\Phi_{a,n}$  on the set of the plane-wave functions  $\Phi_{0,p}$ , while the reverse is impossible. In practice (i.e., concerning numerical calculations), the matrices  $W_{a,0}^{(j)}$ ,  $W_{0,a}^{(j)}$ , and  $U_a$  are not invertible (when truncated for numerical calculations).

For instance, consider the matrix  $W_{a,0}^{(j)}$ : it represents the basis functions  $\phi_{0,p}I$  expanded on the modal functions  $\Phi_{a,n}^{(j)}$ . After this expansion, the part of functions  $\phi_{0,p}I$  corresponding to the interval  $[a, d]$  is equal to zero. In other words, this expansion of functions  $\phi_{0,p}I$  is associated with a projection leading to a development of functions  $\Psi_a \phi_{0,p}I$ :

$$\sum_{n \in N} [W_{a,0}^{(j)}]_{n,q} \Phi_{a,n}^{(j)} = \Psi_a \phi_{0,q}I \neq \phi_{0,q}I, \quad q \in Z. \quad (21)$$

Now, if one applies the matrix  $W_{0,a}^{(j)}$  to this matrix  $W_{a,0}^{(j)}$ , then one cannot recover the basis  $\phi_{0,p}I$  from the set of functions  $\Psi_a \phi_{0,p}I$ . So, from Eq. (20), the product of (infinite) matrices  $W_{0,a}^{(j)} W_{a,0}^{(j)}$  is not the identity for functions of the variable  $x_1$  in  $[0, d]$ :

$$\begin{aligned}
\sum_{p \in Z} \sum_{n \in N} [W_{0,a}^{(j)}]_{p,n} [W_{a,0}^{(j)}]_{n,q} \phi_{0,p} &= \Psi_a \phi_{0,q}I \neq \phi_{0,q}I, \quad q \in Z, \\
\Leftrightarrow W_{0,a}^{(j)} W_{a,0}^{(j)} &= U_a, \quad j = 1, 2.
\end{aligned} \quad (22)$$

Similarly, one can show that the product of (infinite) matrices  $W_{a,0}^{(j)} W_{0,a}^{(j)}$  is the identity for functions of the variable  $x_1$  in  $[0, a]$ :

$$\begin{aligned}
\sum_{m \in N} \sum_{p \in Z} [W_{a,0}^{(j)}]_{m,p} [W_{0,a}^{(j)}]_{p,n} \Phi_{a,m}^{(j)} &= \Phi_{a,n}^{(j)}, \quad n \in N, \\
\Leftrightarrow W_{a,0}^{(j)} W_{0,a}^{(j)} &= I_a, \quad j = 1, 2,
\end{aligned} \quad (23)$$

where  $I_a$  is the infinite matrix with  $2 \times 2$  coefficients

$$[I_a]_{m,n} = \begin{cases} I, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}, \quad m, n \in N. \quad (24)$$

The two matrices  $U_a$  and  $I_a$  are actually the expressions of the projector associated with the function  $\Psi_a$  in two different bases (the plane-wave basis and the modal basis).

The two relationships (22) and (23) imply that the matrices  $W_{a,0}^{(j)}$ ,  $W_{0,a}^{(j)}$ , and  $U_a$  are not invertible. Consequently,

the use of the  $R$  matrix (or  $S$  matrix) algorithm, which necessitates the inversion of these matrices [15,16], is associated with numerical instabilities.

### C. Stable Numerical Method

We think that it is necessary to find a numerically stable technique to invert the matrices  $W_{a,0}^{(j)}$ ,  $W_{0,a}^{(j)}$ , and  $U_a$  to avoid the use of the transfer matrices. The idea is that, if we add an invertible matrix  $I$  (B10) to a noninvertible matrix  $K$ , then the sum  $[I+K]$  is in general invertible: for example, with the following  $2 \times 2$  matrices, one has

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [I+K]^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (25)$$

To use this idea, we define the “impedance” matrix  $Z_a$  associated with the layer of Fig. 2 by

$$\begin{bmatrix} E_a(h) \\ E_a(0) \end{bmatrix} = Z_a \begin{bmatrix} H_a(h) \\ H_a(0) \end{bmatrix}, \quad Z_a = \begin{bmatrix} Z_a^{(11)} & Z_a^{(12)} \\ Z_a^{(21)} & Z_a^{(22)} \end{bmatrix}. \quad (26)$$

This matrix is numerically stable and equivalent to the  $R$  matrix (B18). Indeed, the coefficients of the matrix  $Z_a$  can be deduced from the coefficients of the  $R$  matrix by identifying the expression (B18) with

$$\begin{bmatrix} E_{a,n}(h) \\ E_{a,n}(0) \end{bmatrix} = Z_{a,n} \begin{bmatrix} H_{a,n}(h) \\ H_{a,n}(0) \end{bmatrix}, \quad Z_{a,n} = \begin{bmatrix} Z_{a,n}^{(11)} & Z_{a,n}^{(12)} \\ Z_{a,n}^{(21)} & Z_{a,n}^{(22)} \end{bmatrix}, \quad n \in N. \quad (27)$$

Similarly, we can define the “impedance” matrix  $Z_0$  associated with the layer located between the planes  $x_3 = h$  and  $x_3 = h + h_0$  (Fig. 3) by

$$\begin{bmatrix} E_0(h_0 + h) \\ E_0(h) \end{bmatrix} = Z_0 \begin{bmatrix} H_0(h_0 + h) \\ H_0(h) \end{bmatrix}, \quad Z_0 = \begin{bmatrix} Z_0^{(11)} & Z_0^{(12)} \\ Z_0^{(21)} & Z_0^{(22)} \end{bmatrix}. \quad (28)$$

The expression of its coefficients  $Z_{0,p}$  ( $p$  in  $Z$ ) can be deduced from the expression (C7) of the coefficients  $R_{0,p}$  of the matrix  $R_0$ .

The obtained “impedance” matrix  $Z_a$  is expressed in the modal basis while the matrix  $Z_0$  is expressed in the Fourier basis. It is then necessary to use the continuity conditions (19) to obtain the impedance matrix associated with the two layers. To avoid “direct matrix inversion” we multiply  $E_a(h)$  by  $W_{0,a}^{(1)}$  and we replace  $H_a(h)$  by  $W_{a,0}^{(2)} H_0(h)$  in Eq. (26). Thus we obtain the relationship

$$\begin{bmatrix} E_0(h) \\ E_a(0) \end{bmatrix} = \bar{Z}_a \begin{bmatrix} H_0(h) \\ H_a(0) \end{bmatrix}, \quad \bar{Z}_a = \begin{bmatrix} W_{0,a}^{(1)} Z_a^{(11)} W_{a,0}^{(2)} & W_{0,a}^{(1)} Z_a^{(12)} \\ Z_a^{(21)} W_{a,0}^{(2)} & Z_a^{(22)} \end{bmatrix}. \quad (29)$$

This matrix  $\bar{Z}_a$  is clearly obtained without numerical instabilities since it is based only on matrix multiplications.

Finally, let  $Z_{0a}$  be the impedance matrix associated with the stack made of the homogeneous layer and the layer containing infinitely conducting rods (Fig. 3):



$$\begin{bmatrix} E_0(h_0 + h) \\ E_a(0) \end{bmatrix} = Z_{0a} \begin{bmatrix} H_0(h_0 + h) \\ H_a(0) \end{bmatrix}. \quad (30)$$

This matrix can be expressed from the matrices  $Z_0$  and  $\tilde{Z}_a$  with the group law  $\star$  defined in [13,16]:  $Z_{0a} = Z_0 \star \tilde{Z}_a$ . In particular, the elimination of  $E_0(h)$  and  $H_0(h)$  in Eqs. (28) and (29), shows that, to obtain  $Z_{0a}$ , the only matrix that has to be inverted is

$$Z_0^{(22)} - W_{0,a}^{(1)} Z_a^{(11)} W_{a,0}^{(2)}. \quad (31)$$

From our argument (25), and since  $Z_0^{(22)}$  is invertible, this matrix is certainly invertible as well. Consequently, our numerical method is expected to be stable, and indeed, numerical results presented in Section 6 confirm this argument. Of course, this method is still valid if the matrix  $Z_0$  is associated with a standard lamellar layer made of dielectric materials.

Note that in this particular case of a stack made of homogeneous layer and a layer containing infinitely conducting rods, we find that the solution for the interface at  $x_3 = h$  is precisely the algorithm used in [17]. A similar procedure has to be realized for the interface at  $x_3 = 0$  if the layer below is made of dielectric materials. In Section 5, we show that the solution we proposed can be extended to other geometries and, in particular, to geometries more complicated than the one already considered in the literature [17].

## 5. EXTENSION TO A STACK OF LAYERS CONTAINING INFINITELY CONDUCTING RODS

In this section, we show how to express without numerical instabilities the continuity condition at an interface separating two layers containing infinitely conducting rods.

### A. Basic Example

We consider the structure represented on Fig. 4 with two adjacent layers containing infinitely conducting rods. The bottom layer is located between the two horizontal planes defined by equations  $x_3 = 0$  and  $x_3 = -h_b$ . The first rod is made of dielectric material with dielectric constant  $\epsilon_b$  and

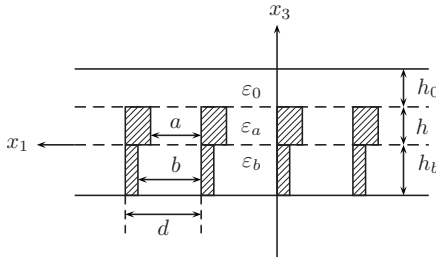


Fig. 4. Structure containing two adjacent layers with infinitely conducting rods. The bottom layer is made of two rods per unit cell: the first rod has width  $b$  and dielectric constant  $\epsilon_b$ , the second rod (shaded domain) has width  $d - b$  and is made of infinitely conducting metal; thickness of this layer is  $h_b$ .

width  $b$ , and the second rod is made of infinitely conducting metal (its width is  $d - b$ ). Thus, the characteristic function of this layer is

$$\Psi_b(x_1) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x_1 + pd \leq b \\ 0 & b < x_1 + pd < d \end{cases}, \quad p \in \mathbb{Z}. \quad (32)$$

Repeating what we did in Sections 3 and 4, we obtain the impedance matrix  $Z_b$  associated with the bottom layer:

$$\begin{bmatrix} E_b(0) \\ E_b(-h_b) \end{bmatrix} = Z_b \begin{bmatrix} H_b(0) \\ H_b(-h_b) \end{bmatrix}, \quad Z_b = \begin{bmatrix} Z_b^{(11)} & Z_b^{(12)} \\ Z_b^{(21)} & Z_b^{(22)} \end{bmatrix}. \quad (33)$$

This impedance matrix  $Z_b$  as well as the vectors  $E_b(0)$ ,  $E_b(-h_b)$ ,  $H_b(0)$ , and  $H_b(-h_b)$  are expressed in the modal basis given by Eqs. (B9) and (B10), where all the subscripts  $a$  have been replaced by  $b$ .

From our analysis in Section 4, we know that it is necessary to express rigorously one modal basis ( $\Phi_{a,n}^{(j)}$  or  $\Phi_{b,n}^{(j)}$ ) using the second modal basis (respectively,  $\Phi_{b,n}^{(j)}$  or  $\Phi_{a,n}^{(j)}$ ). As represented on Fig. 4, suppose that

$$b \geq a \Leftrightarrow \Psi_a \Psi_b = \Psi_a; \quad (34)$$

then at the interface  $x_3 = 0$ , the modal basis  $\Phi_{b,n}^{(j)}$  plays the same role as the Fourier basis at the interface  $x_3 = h$ , since it has the largest support. The continuity conditions at  $x_3 = 0$  for the vectors  $E_a$ ,  $H_a$ ,  $E_b$ , and  $H_b$  should be written

$$\begin{aligned} W_{b,a}^{(1)} E_a(0^+) &= E_b(0^-), \\ H_a(0^+) &= W_{a,b}^{(2)} H_b(0^-), \end{aligned} \quad (35)$$

where  $W_{b,a}^{(j)}$  and  $W_{a,b}^{(j)}$  are, respectively, the matrices with the  $2 \times 2$  coefficients

$$\begin{aligned} [W_{a,b}^{(j)}]_{m,n} &= [W_{b,a}^{(j)}]_{n,m} = \int_{[0,d]} dx_1 \Phi_{a,m}^{(j)}(x_1) \Phi_{b,n}^{(j)}(x_1), \\ m, n &\in \mathbb{N}, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (36)$$

Again, to avoid matrix inversion, these continuity conditions at  $x_3 = 0$  have to be included in the matrix  $Z_a$ , which becomes

$$\begin{bmatrix} E_a(h) \\ E_b(0) \end{bmatrix} = \hat{Z}_a \begin{bmatrix} H_a(h) \\ H_b(0) \end{bmatrix}, \quad \hat{Z}_a = \begin{bmatrix} Z_a^{(11)} & Z_a^{(12)} W_{a,b}^{(2)} \\ W_{b,a}^{(1)} Z_a^{(21)} & W_{b,a}^{(1)} Z_a^{(22)} W_{a,b}^{(2)} \end{bmatrix}. \quad (37)$$

This matrix  $\hat{Z}_a$  can be combined (without numerical instabilities) with  $Z_b$  to obtain  $Z_{ab} = \hat{Z}_a \star Z_b$ , the impedance matrix associated with the layers  $a$  and  $b$ . Indeed, in this case, the only matrix that has to be inverted to obtain  $Z_{ab}$  is

$$W_{b,a}^{(1)} Z_a^{(22)} W_{a,b}^{(2)} - Z_b^{(11)}. \quad (38)$$

Note that it is possible to combine the continuity conditions at  $x_3 = 0$  and  $x_3 = h$  to define the matrix

$$\hat{Z}_a = \begin{bmatrix} W_{0,a}^{(1)} Z_a^{(11)} W_{a,0}^{(2)} & W_{0,a}^{(1)} Z_a^{(12)} W_{a,b}^{(2)} \\ W_{b,a}^{(1)} Z_a^{(21)} W_{a,0}^{(2)} & W_{b,a}^{(1)} Z_a^{(22)} W_{a,b}^{(2)} \end{bmatrix}. \quad (39)$$

This matrix can be combined (without numerical instabilities) with  $Z_b$  and  $Z_0$  to obtain  $Z_{0ab} = Z_0 \star \hat{Z}_a \star Z_b$ , the impedance matrix associated with the three layers represented on Fig. 4.

Finally, in contrast to hypothesis (34), suppose that

$$a \geq b \Leftrightarrow \Psi_a \Psi_b = \Psi_b; \quad (40)$$

then, at the interface  $x_3=0$  the modal basis  $\Phi_{a,n}^{(j)}$  plays the same role as the Fourier basis at the interface  $x_3=h$ , since it has the largest support. The continuity conditions at  $x_3=0$  for the vectors  $E_a, H_a, E_b$ , and  $H_b$  have to be written

$$E_a(0^+) = W_{a,b}^{(1)} E_b(0^-),$$

$$W_{b,a}^{(2)} H_a(0^+) = H_b(0^-), \quad (41)$$

where the expression of matrices  $W_{b,a}^{(j)}$  and  $W_{a,b}^{(j)}$  is given by Eq. (36). Thus these continuity conditions have to be included in the matrix  $Z_b$ , which becomes

$$\begin{bmatrix} E_a(0) \\ E_b(-h_b) \end{bmatrix} = \tilde{Z}_b \begin{bmatrix} H_b(0) \\ H_b(-h_b) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{Z}_b = \begin{bmatrix} W_{b,a}^{(1)} Z_b^{(11)} W_{a,b}^{(2)} & W_{b,a}^{(1)} Z_b^{(12)} \\ Z_a^{(21)} W_{a,b}^{(2)} & Z_a^{(22)} \end{bmatrix}. \quad (42)$$

This matrix  $\tilde{Z}_b$  can be combined (without numerical instabilities) with  $Z_a$  to obtain  $Z_{ab} = Z_a \star \tilde{Z}_b$ , the impedance matrix associated with the layers  $a$  and  $b$ . Also, it is possible to combine this matrix with  $\tilde{Z}_a$  and then  $Z_0$  to obtain  $Z_{0ab} = Z_0 \star \tilde{Z}_a \star \tilde{Z}_b$  in the case of Eq. (40).

### B. General Case

In the general case, a layer can contain several infinitely conducting rods (see Fig. 5). For example, to describe the top layer of Fig. 5, we define the characteristic function

$$\Psi_a = \Psi_{a_1} + \Psi_{a_2} + \dots + \Psi_{a_q},$$

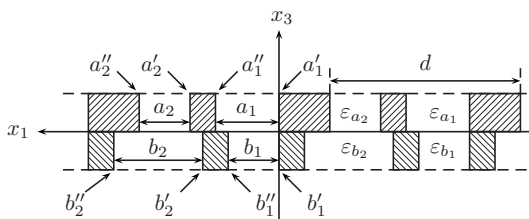


Fig. 5. Structure containing two adjacent layers with infinitely conducting rods. Each layer contains four different rods: the two dielectric rods have widths  $c_1=c'_1-c'_1$  and  $c_2=c'_2-c'_2$  and dielectric constants  $\epsilon_c$  and  $\epsilon_{c_2}$  ( $c=a$  for the top layer and  $c=b$  for the bottom layer). The other two rods (shaded domain) are made of infinitely conducting metal.

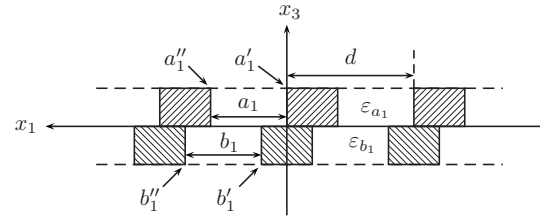


Fig. 6. Structure that cannot be modeled using a numerical stacking algorithm, since  $a'_1 < b'_1 < a''_1 < b''_1$ .

$$\Psi_{a_j} = \begin{cases} 1 & a'_j \leq x_1 + pd \leq a''_j \\ 0 & a''_j < x_1 + pd < a'_{j+1} \end{cases}, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad (43)$$

from the parameter

$$a = (a'_1, a''_1, a'_2, a''_2, \dots, a'_q, a''_q, a'_{q+1}) \quad a'_{q+1} = d, \quad (44)$$

with  $q=2$ . Similarly, the bottom layer of Fig. 5 is described using the characteristic function

$$\Psi_b = \Psi_{b_1} + \Psi_{b_2} + \dots + \Psi_{b_l}, \quad (45)$$

with  $l=2$ .

All the calculations of Sections 3 and 4 can be realized for each dielectric rod corresponding to characteristic functions  $\Psi_{a_j}$  ( $j=1, 2, \dots, q$ ) and  $\Psi_{b_k}$  ( $k=1, 2, \dots, l$ ). From our analysis of Subsection 5.A, we can deduce that it is possible to obtain a stable stacking algorithm if, for each dielectric rod corresponding to  $\Psi_{a_j}$  ( $j=1, 2, \dots, q$ ), there exists a rod with the corresponding  $\Psi_{b_k}$  ( $k$  in  $\{1, 2, \dots, l\}$ ) such that

$$\Psi_{a_j} \Psi_{b_k} = \Psi_{a_j} \quad \text{or} \quad \Psi_{a_j} \Psi_{b_k} = \Psi_{b_k}. \quad (46)$$

In the case where  $\Psi_{a_j} \Psi_{b_k} = \Psi_{a_j}$  (for example,  $\Psi_{a_2} \Psi_{b_2} = \Psi_{a_2}$  in the case of Fig. 5), the procedure presented from relation (34) to equation (39) has to be used. And in the case  $\Psi_{a_j} \Psi_{b_k} = \Psi_{b_k}$  (for example,  $\Psi_{a_1} \Psi_{b_1} = \Psi_{b_1}$  in the case of Fig. 5), the procedure presented from relation (40) to equation (42) has to be used.

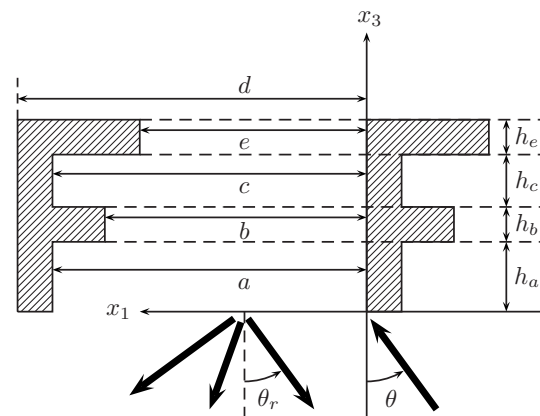


Fig. 7. Structure under consideration. The spatial period is  $d=20.0$ . The four layers have widths  $a=18.0$ ,  $b=15.0$ ,  $c=18.0$ ,  $e=13.0$ , and thicknesses  $h_a=4.0$ ,  $h_b=2.0$ ,  $h_c=3.0$ ,  $h_e=2.0$ .

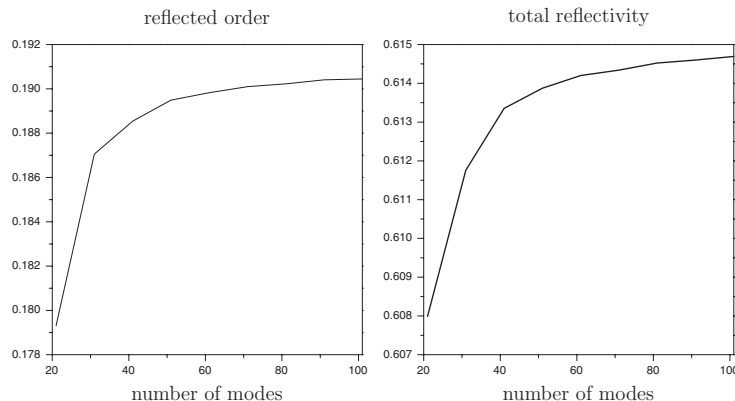


Fig. 8. Convergence of the main reflected order (left) and of the total reflectivity (right) when the number of modes is increasing.

Of course the condition (46) stays valid in the trivial case where the rod corresponding to  $\Psi_{a_j}$  has no connection with all the rods of the layer  $b$  (for example,  $\Psi_{b_k}=0$  if  $b'_k=b''_k$ ). Thus it defines definitely the condition permitting the use of the stable numerical algorithm.

### C. Limits of the Stable Numerical Method

We here define precisely the conditions where the algorithm we have defined cannot be used. These conditions are the negation of Eq. (46) so they can be written

$$\Psi_{a_j}\Psi_{b_k} \neq \Psi_{a_j}, \quad \Psi_{a_j}\Psi_{b_k} \neq \Psi_{b_k}, \quad \Psi_{a_j}\Psi_{b_k} \neq 0. \quad (47)$$

In practice, this condition corresponds to the example represented on Fig. 6.

## 6. NUMERICAL RESULTS

To show that our numerical procedure is numerically stable, we consider the “canonic” example defined in [18] and repeated on a one-dimensional lattice. The structure is then a set of periodically spaced and infinitely conducting F embedded in vacuum (see Fig. 7).

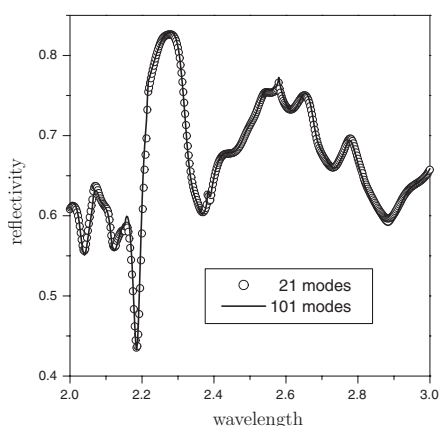


Fig. 9. Total reflectivity as a function of the wavelength (from 2.0 to 3.0) for two different numbers of modes.

This structure is illuminated by a plane wave with wavelength equal to  $2.0=0.1d$ , corresponding in this paper to the normalized frequency  $\omega d\sqrt{\epsilon_0\mu_0}/(2\pi)=0.5$ . The incident angle of this plane wave is  $\theta=45^\circ$ , and the conical angle  $\varphi=30^\circ$ . Thus, the incident wavevector  $\mathbf{k}^i=k_1\mathbf{e}_1+k_2\mathbf{e}_2+k_3\mathbf{e}_3$  is well defined since  $k_1=\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}\sin\theta\cos\varphi$ ,  $k_2=\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}\sin\theta\sin\varphi$ , and  $k_1^2+k_2^2+k_3^2=\omega^2\epsilon_0\mu_0$ . Finally, the incident field is *s*-polarized: the electric field is perpendicular to the incident plane, i.e., parallel to the vector  $\mathbf{e}_3=k_2\mathbf{e}_1-k_1\mathbf{e}_2$ .

Figure 8 shows the reflected order with larger amplitude (for  $\theta_r \approx \theta$  on Fig. 7, corresponding to  $k_1+p2\pi/d \approx -k_1$  with  $p=-12$  for the first component of the reflected wave vector) and the total reflectivity as functions of the number of modes. It clearly shows that the algorithm is stable and convergent.

To complete this test of numerical stability, we have represented on Fig. 9 the total reflectivity as a function of the wavelength  $2\pi/(\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0})$  for 21 and 101 modes. The result shows that the exact modal method converges very rapidly since, for  $2\pi/(\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0})$  equal to 2.0 and 3.0, there are, respectively, 19 and 13 diffracted orders.

As a final word, we thought it would be relevant to compare our results to those obtained through another numerical method: the fictitious-sources method. The latter, described in [18–23], has the ability to solve problems of diffraction by arbitrarily shaped objects. Moreover, it is well adapted to perfectly conducting materials.

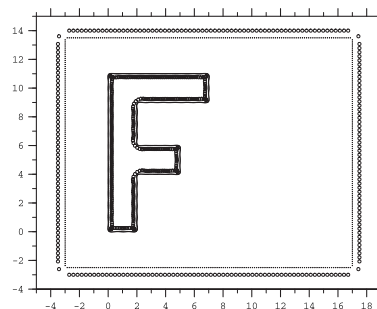


Fig. 10. Discretized objects (rectangular cell and the F). Black points and open circles fictitious sources represent.

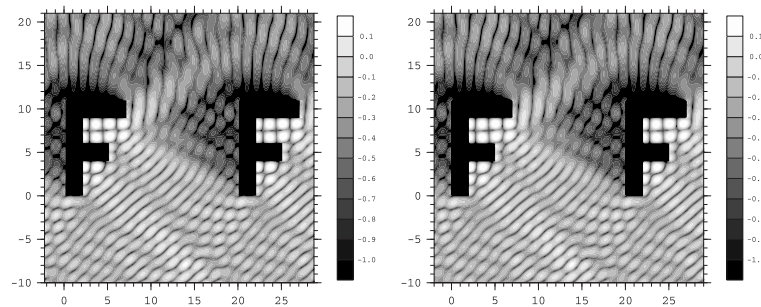


Fig. 11. Maps of  $\log_{10}|E_1|$ —the electric field along the periodicity direction—using the modal method (left) and the fictitious-sources method (right).

In order to handle periodic geometries, diffractive objects are embedded in a cell—a rectangular fictitious object. Its width is the period  $d$ , its height is arbitrary (provided that the objects are entirely contained within the cell domain), and its edges have particular properties: the two vertical (lateral) edges are linked to each other thanks to periodic boundary conditions; the two horizontal edges are connected to surrounding media by Rayleigh expansions (heading upward from the topmost side and downward from the other one).

Getting back to our case, the electromagnetic field inside the cell (but outside the F) is fed by 300 fictitious sources located inside the F and 250 outside the cell (see Fig. 10 for the location of these sources). The boundary conditions are enforced using a least-squares algorithm with 600 points on the F and 500 on the cell. Above and below the cell, the electromagnetic field is expressed as a sum of 51 diffraction orders.

The calculations performed by the fictitious-sources method were more than 99% accurate regarding the energy balance criterion. To illustrate the comparison, we plot a map in the neighborhood of the structure using both methods (see Fig. 11).

Since the contour levels and scales are identical, one can compare the two maps of Fig. 11 and see that the agreement between the two methods is nearly perfect.

## 7. CONCLUSION

We have shown that by using the appropriate algorithm the exact modal method can be used to solve Maxwell's equations in presence of various kinds of lamellar grating that contain infinitely conducting metal. Note, moreover, that with a similar analysis, we can argue that the proposed method stays valid for highly conducting metallic parts. In that case, the only additional difficulty consists in finding the exact eigenvalues and eigenfunctions. A solution has been provided in [17] due to a perturbation theory. Also, it has to be noted that the presence of dielectric materials will not change the conclusions of the present paper.

The same stacking solution should be valuable if used in conjunction with the Fourier modal method also.

Finally, the analysis can be easily generalized to the case of three-dimensional structures. In particular, the

proposed algorithm should be stable in the case of such interesting structures as infinitely (or highly) conducting plates with holes.

## APPENDIX A: ELECTROMAGNETIC FIELD

We assume only that the electromagnetic field satisfies the prerequisite finite energy criterion of square integrability in all horizontal planes:

$$\int_{\mathbb{R}^2} dx_1 dx_2 |\mathbf{G}_\omega(\mathbf{x})|^2 < \infty, \quad x_3 \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{G}_\omega = \mathbf{E}_\omega, \mathbf{H}_\omega. \quad (\text{A1})$$

As a first consequence, it is possible to apply to Eqs. (8) a Fourier transform  $\mathcal{F}_0$  with respect to the variable  $x_2$  in order to take advantage of the  $x_2$  invariance:

$$[\mathcal{F}_0(\mathbf{G}_\omega)](x_1, k_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dx_2 \exp(-ik_2 x_2) \mathbf{G}_\omega(x_1, x_2, x_3), \quad (\text{A2})$$

for all  $x_1, k_2, x_3 \in \mathbb{R}$  and  $\mathbf{G}_\omega = \mathbf{E}_\omega, \mathbf{H}_\omega$ . The original solution is then recomposed by the inverse Fourier transform.

As a second consequence of Eq. (A1), it is possible to apply to Eqs. (8) a Floquet–Bloch transform  $\mathcal{F}_d$  with respect to the variable  $x_1$  in order to take advantage of the  $x_1$  periodicity:

$$[\mathcal{F}_d(\mathbf{G}_\omega)](x_1, k_1, x_2, x_3) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \mathbf{G}_\omega(x_1 + pd, x_2, x_3) \exp(-ik_1 pd), \quad (\text{A3})$$

for all  $x_1, k_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$  and  $\mathbf{G}_\omega = \mathbf{E}_\omega, \mathbf{H}_\omega$ . The original solution is then recomposed by the inverse Floquet–Bloch transform

$$\mathbf{G}_\omega(x_1, x_2, x_3) = \frac{d}{2\pi} \int_{(-\pi/d, \pi/d)} dk_1 [\mathcal{F}_d(\mathbf{G}_\omega)](x_1, k_1, x_2, x_3), \quad (\text{A4})$$

for all  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$  and  $\mathbf{G}_\omega = \mathbf{E}_\omega, \mathbf{H}_\omega$ . After the application of these Fourier (A2) and Floquet–Bloch (A3) transforms,  $\hat{\mathbf{G}}_\omega = \mathcal{F}_d[\mathcal{F}_0(\mathbf{G}_\omega)]$  satisfies for  $\mathbf{G}_\omega = \mathbf{E}_\omega, \mathbf{H}_\omega$  the criterion

Gralak *et al.*

Vol. 25, No. 12/December 2008/J. Opt. Soc. Am. A 3107

$$\int_{[0,d]} dx_1 |\hat{\mathbf{G}}_\omega(x_1, k_1, k_2, x_3)|^2 < \infty, \quad k_1, k_2, x_3 \in \mathbb{R}, \quad (\text{A5})$$

as well as the partial Bloch boundary condition

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{G}}_\omega(x_1 + d, k_1, k_2, x_3) &= \exp(ik_1 d) \hat{\mathbf{G}}_\omega(x_1, k_1, k_2, x_3), \\ x_1, k_1, k_2, x_3 &\in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

Then Eq. (8) becomes

$$\hat{\mathbf{E}}_\omega = \Psi_a(\omega\epsilon_a)^{-1} \nabla_{k_2} \times \hat{\mathbf{H}}_\omega, \quad \hat{\mathbf{H}}_\omega = (\omega\mu_0)^{-1} \nabla_{k_2} \times \hat{\mathbf{E}}_\omega, \quad (\text{A7})$$

where  $\nabla_{k_2} \times$  is the curl operator with the partial derivation  $\partial_2$  replaced by  $ik_2$ .

For all fixed Bloch wave vector  $k_1$ , we denote by  $\mathcal{H}(k_1)$  the Hilbert space of functions that satisfy the two conditions (A5) and (A6), i.e., the space square integrable function on the domain  $[0, d]$  with the partial Bloch boundary condition.

As a third consequence, the combination of the square integrability of Eqs. (A1) and (A5) together with Eqs. (A8) below imposes that (1) the tangential components of  $\hat{\mathbf{E}}_\omega$  are continuous at all the interfaces separating dielectrics and infinitely conducting metal [since  $\hat{\mathbf{H}}_\omega = (\omega\mu_0)^{-1} \nabla \times \hat{\mathbf{E}}_\omega$  everywhere], and (2) the tangential components of  $\hat{\mathbf{H}}_\omega$  are continuous at all the interfaces separating dielectrics. More precisely, in the present case, the metallic rod imposes the conditions

$$\begin{aligned} \hat{E}_{\omega,1}(x_1, k_1, k_2, x_3) &= \hat{E}_{\omega,2}(x_1, k_1, k_2, x_3) = 0, \\ a \leq x_1 \leq d, \quad x_3 &= 0, h; \\ \hat{E}_{\omega,2}(x_1, k_1, k_2, x_3) &= \hat{E}_{\omega,3}(x_1, k_1, k_2, x_3) = 0, \\ 0 \leq x_3 \leq h, \quad x_1 &= 0, a. \end{aligned} \quad (\text{A8})$$

## APPENDIX B: SOLUTION OF MAXWELL'S EQUATION IN A LAYER CONTAINING INFINITELY CONDUCTING METAL

### 1. Determination of the Modal Basis

From Eqs. (A7) and (A8), the components  $\hat{E}_{\omega,2}$  and  $\hat{E}_{\omega,3}$  of the electric field are continuous functions of the variable  $x_1$  and satisfy the equation

$$(\partial_3^2 + L_a) \hat{E}_{\omega,j} = 0, \quad L_a = \omega^2 \epsilon_a \mu_0 - k_2^2 + \partial_1^2, \quad j = 2, 3, \quad (\text{B1})$$

where  $L_a$  is acting on the Hilbert space  $\mathcal{H}_a(k_1) \subset \mathcal{H}(k_1)$  defined by  $\mathcal{H}_a(k_1) = \{\varphi = \Psi_a \psi \mid \psi \in \mathcal{H}(k_1), \varphi(0) = \varphi(a) = 0\}$ . Let  $\{\varphi_{a,n} \mid n \in \mathbb{N}\}$  be the set of the eigenfunctions of  $L_a$  and  $\{\lambda_{a,n} \mid n \in \mathbb{N}\}$  the associated eigenvalues:

$$L_a \varphi_{a,n} = \lambda_{a,n} \varphi_{a,n}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (\text{B2})$$

The expressions of these eigenfunctions and the associated eigenvalues are

$$\begin{aligned} \phi_{a,n}: x_1 &\mapsto \sqrt{\frac{2}{a}} \Psi_a(x_1) \sin(n\pi x_1/a), \\ \lambda_{a,n} &= \omega^2 \epsilon_a \mu_0 - k_2^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2. \end{aligned} \quad (\text{B3})$$

Note that for  $n=0$  the function  $\varphi_{a,0}$  is not an eigenfunction of the operator  $L_a$ , since it is the null function. We include it because it is more convenient for the following calculations. Developing the components  $\hat{E}_{\omega,2}$  and  $\hat{E}_{\omega,3}$  on this orthonormal set of eigenfunctions, we obtain from Eq. (B1) the (formal) expression

$$\begin{aligned} \hat{E}_{\omega,j}(x_3) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \phi_{a,n} \left[ \hat{E}_{\omega,j}^{(a,n)}(0) \cos(\sqrt{\lambda_{a,n}} x_3) + (\partial_3 \hat{E}_{\omega,j}^{(a,n)}) \right. \\ &\quad \left. \times (0) \frac{\sin(\sqrt{\lambda_{a,n}} x_3)}{\sqrt{\lambda_{a,n}}} \right], \quad j = 2, 3, \end{aligned} \quad (\text{B4})$$

where the coefficients  $\hat{E}_{\omega,j}^{(a,n)}(0)$  and  $(\partial_3 \hat{E}_{\omega,j}^{(a,n)})(0)$  are, respectively, the projection the functions  $\varphi_{a,n}$  of  $\hat{E}_{\omega,j}$  and  $\partial_3 \hat{E}_{\omega,j}$ ,

$$\begin{aligned} \hat{E}_{\omega,j}^{(a,n)}(x_3) &= \int_{[0,d]} dx_1 \phi_{a,n}(x_1) \hat{E}_{\omega,j}(x_1, x_3), \\ (\partial_3 \hat{E}_{\omega,j}^{(a,n)})(x_3) &= \int_{[0,d]} dx_1 \phi_{a,n}(x_1) (\partial_3 \hat{E}_{\omega,j})(x_1, x_3), \end{aligned} \quad j = 2, 3, \quad (\text{B5})$$

taken at  $x_3=0$ .

From Eq. (A7), the electric field satisfies  $\nabla \cdot \hat{\mathbf{E}}_\omega = 0$ . Then, the expression of the first component  $\hat{E}_{\omega,1}$  of the electric field can be deduced from the expression (B4) of the other two components:  $\partial_1 \hat{E}_{\omega,1} = -ik_2 \hat{E}_{\omega,2} - \partial_3 \hat{E}_{\omega,3}$ . In particular, its  $x_1$  dependence can be developed on the eigenfunctions of the operator

$$L'_a = \omega^2 \epsilon_a \mu_0 - k_2^2 + \partial_1^2 \quad (\text{B6})$$

acting on the Hilbert space  $\mathcal{H}'_a(k_1) \subset \mathcal{H}(k_1)$  defined by  $\mathcal{H}'_a(k_1) = \{\varphi = \Psi_a \psi \mid \psi \in \mathcal{H}(k_1), (\partial_1 \varphi)(0) = (\partial_1 \varphi)(a) = 0\}$ . Let  $\{\varphi'_{a,n} \mid n \in \mathbb{N}\}$  be the set of the eigenfunctions of  $L'_a$  and  $\{\lambda'_{a,n} \mid n \in \mathbb{N}\}$  the associated eigenvalues:

$$L'_a \varphi'_{a,n} = \lambda'_{a,n} \varphi'_{a,n}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (\text{B7})$$

The expressions of these eigenfunctions are

$$\begin{aligned} \phi'_{a,0}: x_1 &\mapsto \sqrt{\frac{1}{a}} \Psi_a(x_1), \\ \phi'_{a,n}: x_1 &\mapsto \sqrt{\frac{2}{a}} \Psi_a(x_1) \cos(n\pi x_1/a), \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}. \end{aligned} \quad (\text{B8})$$

Note that the numbering of the eigenfunctions of  $L_a$  and  $L'_a$  is done such that, for all  $n$  in  $\mathbb{N}$ , they are associated with the same eigenvalues given by Eq. (B3).

Finally, the modal basis associated with the magnetic field is deduced from Eq. (A7):  $\hat{\mathbf{H}}_\omega = (\omega\mu_0)^{-1} \nabla_{k_2} \times \hat{\mathbf{E}}_\omega$ . The  $x_1$  dependence of the component  $\hat{H}_{\omega,1}$  can be developed on the eigenfunctions of the operator  $L_a$  of Eq. (B3), while the  $x_1$  dependence of the components  $\hat{H}_{\omega,2}$  and  $\hat{H}_{\omega,3}$  can be developed on the eigenfunctions of the operator  $L'_a$  of Eq. (B8).

## 2. Transfer Matrix in the Modal Basis

We are now ready to obtain the relationship between the vectors  $F(0)$  and  $F(h)$  in the modal basis and then the transfer matrix. Let the matrices

$$\Phi_{a,n} = \begin{bmatrix} \Phi_{a,n}^{(1)} & 0 \\ 0 & \Phi_{a,n}^{(2)} \end{bmatrix}, \quad \Lambda_{a,n} = \begin{bmatrix} \lambda_{a,n} I & 0 \\ 0 & \lambda_{a,n} I \end{bmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (\text{B9})$$

be defined from the matrix-valued functions

$$\Phi_{a,n}^{(1)} = \begin{bmatrix} \phi'_{a,n} & 0 \\ 0 & \phi_{a,n} \end{bmatrix}, \quad \Phi_{a,n}^{(2)} = \begin{bmatrix} \phi_{a,n} & 0 \\ 0 & \phi'_{a,n} \end{bmatrix},$$

$$n \in \mathbb{N}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{B10})$$

Then, as with Eq. (B4), it is possible to develop the vector  $F$  on the sets of functions and numbers

$$F(x_3) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \Phi_{a,n} \left[ \cos(\sqrt{\Lambda_{a,n}} x_3) F_{a,n}(0) + \frac{\sin(\sqrt{\Lambda_{a,n}} x_3)}{\sqrt{\Lambda_{a,n}}} (\partial_3 F_{a,n})(0) \right], \quad (\text{B11})$$

where the constant vectors  $F_{a,n}(0)$  and  $(\partial_3 F_{a,n})(0)$  are, respectively, the projection on the matrix-valued functions  $\Phi_{a,n}$  of the vector-valued functions  $F$  and  $\partial_3 F$ ,

$$F_{a,n}(x_3) = \int_{[0,d]} dx_1 \Phi_{a,n}(x_1) F(x_1, x_3),$$

$$(\partial_3 F_{a,n})(x_3) = \int_{[0,d]} dx_1 \Phi_{a,n}(x_1) (\partial_3 F)(x_1, x_3), \quad (\text{B12})$$

taken at  $x_3=0$ . The coefficients  $(\partial_3 F_{a,n})(0)$  can be expressed from the coefficients  $F_{a,n}(0)$  as follows. After eliminating the vertical components  $\hat{E}_{\omega,3}$  and  $\hat{H}_{\omega,3}$ , Eq. (A7) becomes, for all  $0 \leq x_1 \leq a$ ,

$$\partial_3 F = M_a F, \quad M_a = \begin{bmatrix} -ik_2 \sigma_a^{-1} \partial_1 & \sigma_a + \sigma_a^{-1} \partial_1^2 \\ -\sigma_a + k_2^2 \sigma_a^{-1} & ik_2 \sigma_a^{-1} \partial_1 \end{bmatrix},$$

$$\sigma_a = \omega \begin{bmatrix} 0 & \mu_0 \\ \epsilon_a & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B13})$$

In this last equation, replacing the vector  $F$  by its expression (B11) and then projecting on the functions  $\Phi_{a,n}$ , one obtains

$$(\partial_3 F_{a,n})(0) = M_{a,n} F_{a,n}(0), \quad p \in \mathbb{N}, \quad (\text{B14})$$

where

$$M_{a,n} = \begin{bmatrix} ik_2(n\pi/a) J \sigma_a^{-1} & [\omega^2 \epsilon_a \mu_0 - (n\pi/a)^2] \sigma_a^{-1} \\ -(\omega^2 \epsilon_1 \mu_0 - k_2^2) \sigma_a^{-1} & ik_2(n\pi/a) J \sigma_a^{-1} \end{bmatrix},$$

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{B15})$$

Combining expression (B11) of the vector  $F$  with the relationship (B14), one obtains the expression of the vector  $F$  in all the considered layers from its value at  $x_3=0$ :

$$F(x_3) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \Phi_{a,n} \left[ \cos(\sqrt{\Lambda_{a,n}} x_3) + \frac{\sin(\sqrt{\Lambda_{a,n}} x_3)}{\sqrt{\Lambda_{a,n}}} M_{a,n} \right] F_{a,n}(0). \quad (\text{B16})$$

Applying this last expression at  $x_3=h$ , we obtain the relationship between  $F(0)$  and  $F(h)$  in the modal basis provided by the transfer matrices  $T_{a,n}$ :

$$F_{a,n}(h) = T_{a,n} F_{a,n}(0), \quad T_{a,n} = \cos(\sqrt{\Lambda_{a,n}} h) + \frac{\sin(\sqrt{\Lambda_{a,n}} h)}{\sqrt{\Lambda_{a,n}}} M_{a,n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (\text{B17})$$

where the coefficients  $F_{a,n}(h)$  are defined taking Eq. (B12) at  $x_3=h$ .

## 3. R Matrix in the Modal Basis

The direct use of the transfer matrix given by Eq. (B17) is known to be numerically unstable [13]. That is the reason the  $R$  matrix algorithm based on a rigorous propagation procedure adapted to "elliptic evolution equations" is considered [16]. The  $R$  matrix  $R_a$  associated with this layer can be defined from a collection of  $R_{a,n}$  matrices by

$$\begin{bmatrix} F_{a,n}^{(1)}(h) \\ F_{a,n}^{(1)}(0) \end{bmatrix} = R_{a,n} \begin{bmatrix} F_{a,n}^{(2)}(h) \\ F_{a,n}^{(2)}(0) \end{bmatrix},$$

$$R_{a,n} = \begin{bmatrix} R_{a,n}^{(11)} & R_{a,n}^{(12)} \\ R_{a,n}^{(21)} & R_{a,n}^{(22)} \end{bmatrix} \quad n \in \mathbb{N}. \quad (\text{B18})$$

Their expression can be obtained from the identification of Eqs. (B17) and (B18):

$$R_{a,n}^{(11)} = -[\omega^2 \epsilon_a \mu_0 - k_2^2]^{-1} \left[ \frac{\cos(\sqrt{\Lambda_{a,n}} h)}{\sqrt{\Lambda_{a,n}}} \sigma_a + ik_2 \frac{p\pi}{a} J \right],$$

$$R_{a,n}^{(12)} = +[\omega^2 \epsilon_a \mu_0 - k_2^2]^{-1} \frac{\sqrt{\Lambda_{a,n}}}{\sin(\sqrt{\Lambda_{a,n}} h)} \sigma_a,$$



Gralak *et al.*

Vol. 25, No. 12/December 2008/J. Opt. Soc. Am. A 3109

$$R_{a,n}^{(21)} = -[\omega^2 \epsilon_a \mu_0 - k_2^2]^{-1} \frac{\sqrt{\lambda_{a,n}}}{\sin(\sqrt{\lambda_{a,n}} h)} \sigma_a,$$

$$R_{a,n}^{(22)} = -[\omega^2 \epsilon_a \mu_0 - k_2^2]^{-1} \left[ \frac{\cos(\sqrt{\lambda_{a,n}} h)}{\sin(\sqrt{\lambda_{a,n}} h)} \sigma_a - i k_2 \frac{p \pi}{a} J \right]. \quad (\text{B19})$$

We have here an expression of the  $R$  matrix associated with each layer considered in the modal basis.

### APPENDIX C: SOLUTION OF MAXWELL'S EQUATIONS IN A HOMOGENEOUS LAYER

The Fourier basis can be considered as the modal basis associated with a homogeneous layer [15]. Then the solution of Maxwell's equations in this homogeneous layer can be written as the expression of Eq. (B16):

$$F(x_3 + h) = \sum_{p \in N} \Phi_{0,p} \left[ \cos(\sqrt{\Lambda_{0,p}} x_3) + \frac{\sin(\sqrt{\Lambda_{0,p}} x_3)}{\sqrt{\Lambda_{0,p}}} M_{0,p} \right] F_{0,p}(h), \quad (\text{C1})$$

where  $\Phi_{0,p}$  is the tensor product of the  $4 \times 4$  unit matrix with the plane-wave function

$$\phi_{0,p}: x_1 \mapsto \sqrt{\frac{1}{d}} \exp[i(k_1 + p 2\pi/d)x_1], \quad p \in Z, \quad (\text{C2})$$

$\Lambda_{0,p}$  is the product of the  $4 \times 4$  unit matrix with the eigenvalue

$$\lambda_{0,p} = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 - k_2^2 - \left( k_1 + p \frac{2\pi}{d} \right)^2, \quad (\text{C3})$$

and the matrix  $M_{0,p}$  is defined by

$$M_{0,p} = \begin{bmatrix} k_2(k_1 + p 2\pi/d) \sigma_0^{-1} & [\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 - (k_1 + p 2\pi/d)^2] \sigma_0^{-1} \\ -(\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 - k_2^2) \sigma_0^{-1} & -k_2(k_1 + p 2\pi/d) \sigma_0^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{C4})$$

from the constant  $2 \times 2$  matrix

$$\sigma_0 = \omega \begin{bmatrix} 0 & \mu_0 \\ \epsilon_0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{C5})$$

The constant vectors  $F_{0,p}(h)$  are the Fourier coefficients of the vector  $F(h)$ , i.e., the projection on the matrix-valued functions  $\Phi_{0,p}$  of the vector-valued function  $F$

$$F_{0,p}(x_3) = \int_{[0,d]} dx_1 \overline{\Phi_{0,p}(x_1)} F(x_1, x_3) \quad (\text{C6})$$

taken at  $x_3 = h$ .

Finally, the  $R$  matrix  $R_0$  associated with this homogeneous layer can be defined from a collection of  $R_{0,p}$  matrices by

$$\begin{bmatrix} F_{0,p}^{(1)}(h_0 + h) \\ F_{0,p}^{(1)}(h) \end{bmatrix} = R_{0,p} \begin{bmatrix} F_{0,p}^{(2)}(h_0 + h) \\ F_{0,p}^{(2)}(h) \end{bmatrix},$$

$$R_{0,p} = \begin{bmatrix} R_{0,p}^{(11)} & R_{0,p}^{(12)} \\ R_{0,p}^{(21)} & R_{0,p}^{(22)} \end{bmatrix}, \quad p \in Z, \quad (\text{C7})$$

with their expression provided by

$$R_{0,p}^{(11)} = -[\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 - k_2^2]^{-1} \left[ \frac{\cos(\sqrt{\lambda_{0,p}} h_0)}{\sqrt{\lambda_{0,p}} \sin(\sqrt{\lambda_{0,p}} h_0)} \sigma_0 - k_2 \left( k_1 + p \frac{2\pi}{d} \right) I \right],$$

$$R_{0,p}^{(12)} = +[\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 - k_2^2]^{-1} \frac{\sqrt{\lambda_{0,p}}}{\sin(\sqrt{\lambda_{0,p}} h_0)} \sigma_0,$$

$$R_{0,p}^{(21)} = -[\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 - k_2^2]^{-1} \frac{\sqrt{\lambda_{0,p}}}{\sin(\sqrt{\lambda_{0,p}} h_0)} \sigma_0,$$

$$R_{0,p}^{(22)} = -[\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 - k_2^2]^{-1} \left[ \frac{\cos(\sqrt{\lambda_{0,p}} h_0)}{\sqrt{\lambda_{0,p}} \sin(\sqrt{\lambda_{0,p}} h_0)} \sigma_0 + k_2 \left( k_1 + p \frac{2\pi}{d} \right) I \right]. \quad (\text{C8})$$

### ACKNOWLEDGMENTS

This work was partly supported by the research program METAPHORE (Action Concertée nanosciences et nanotechnologies of the French Ministère de la Recherche et des Nouvelles Technologies) as well as Thales Alenia Space.

### REFERENCES

1. L. C. Botten, M. S. Craig, R. C. McPhedran, J. L. Adams, and J. R. Andrewartha, "The dielectric lamellar diffraction grating," *Opt. Acta* **28**, 413–428 (1981).
2. L. C. Botten, M. S. Craig, R. C. McPhedran, J. L. Adams, and J. R. Andrewartha, "The finitely conducting lamellar diffraction grating," *Opt. Acta* **28**, 1087–1102 (1981).
3. L. C. Botten, M. S. Craig, and R. C. McPhedran, "Highly conducting lamellar diffraction grating," *Opt. Acta* **28**, 1103–1106 (1981).
4. M. G. Moharam and T. K. Gaylord, "Rigorous coupled-waves analysis of metallic surface-relief grating," *J. Opt. Soc. Am. A* **3**, 1780–1787 (1986).
5. T. W. Ebbesen, H. J. Lezec, H. F. Ghaemi, T. Thio, and P. A. Wolff, "Extraordinary optical transmission through subwavelength hole arrays," *Nature (London)* **391**, 667–669 (1998).
6. S. Enoch, M. Nevière, E. Popov, and R. Reinisch, "Enhanced light transmission by hole arrays," *J. Opt. A, Pure Appl. Opt.* **4**, S83–S87 (2002).
7. S. Enoch, G. Tayeb, P. Sabouroux, N. Guérin, and P. Vincent, "A metamaterial for directive emission," *Phys. Rev. Lett.* **89**, 213902 (2002).
8. P. Andrew and W. L. Barnes, "Molecular fluorescence above metallic gratings," *Phys. Rev. B* **64**, 125405 (2001).

9. J. Kalkman, C. Strohöfer, B. Gralak, and A. Polman, "Surface plasmon polariton modified emission of erbium in a metalodielectric grating," *Appl. Phys. Lett.* **83**, 30 (2003).
10. Y. De Wilde, F. Formanek, R. Carminati, B. Gralak, P.-A. Lemoine, K. Joulain, J.-P. Mulet, Y. Chen, and J.-J. Greffet, "Thermal radiation scanning tunnelling microscopy," *Nature (London)* **444**, 740–743 (2006).
11. M. C. K. Wiltshire, J. B. Pendry, I. R. Young, D. J. Larkman, D. J. Gilderdale, and J. V. Hajnal, "Microstructured magnetic materials for RF flux guides in magnetic resonance imaging," *Science* **291**, 849–851 (2001).
12. R. A. Shelby, D. R. Smith, and S. Schultz, "Experimental verification of a negative index of refraction," *Science* **292**, 77–79 (2001).
13. L. Li, "Formulation and comparison of two recursive matrix algorithms for modeling layered diffraction gratings," *J. Opt. Soc. Am. A* **13**, 1024–1035 (1996).
14. S. Campbell, L. C. Botten, C. Martijn De Sterke, and R. C. McPhedran, "Fresnel formulation for multi-element lamellar diffraction gratings in conical mountings," *Waves Random Complex Media* **17**, 455–475 (2007).
15. L. Li, "A modal analysis of lamellar diffraction gratings in conical mountings," *J. Mod. Opt.* **40**, 553–573 (1993).
16. B. Gralak, M. de Dood, G. Tayeb, S. Enoch, and D. Maystre, "Theoretical study of photonic band gaps in woodpile crystals," *Phys. Rev. E* **67**, 066601 (2003).
17. Z.-Y. Li and K.-M. Ho, "Analytic modal solution to light propagation through layer-by-layer metallic photonic crystals," *Phys. Rev. B* **67**, 165104 (2003).
18. G. Tayeb and S. Enoch, "Combined fictitious sources–scattering matrix method," *J. Opt. Soc. Am. A* **21**, 1417–1423 (2004).
19. C. Hafner, *The Generalized Multipole Technique for Computational Electromagnetics* (Artech House, 1990).
20. G. Tayeb, "The method of fictitious sources applied to diffraction gratings," Special issue on Generalized Multipole Techniques (GMT) of Applied Computational Electromagnetics Society Journal 9, 90–100 (1994).
21. D. Maystre, M. Saillard, and G. Tayeb, *Scattering* (Academic, 2001).
22. D. Kaklamani and H. Anastassiou, "Aspects of the method of auxiliary sources (MAS) in computational electromagnetics," *IEEE Antennas Propag. Mag.* **44**, 48–64 (2002).
23. G. Benelli, S. Enoch, and G. Tayeb, "Modelling of a single object embedded in a layered medium," *J. Mod. Opt.* **54**, 871–879 (2007).



## Quasi-TEM modes in rectangular waveguides: a study based on the properties of PMC and hard surfaces

R. Pierre, G. Tayeb\*, B. Gralak and S. Enoch

*Faculté des Sciences et Techniques, Institut Fresnel, Université Paul Cézanne Aix-Marseille III, Marseille, France*

*(Received 9 September 2008; final version received 4 November 2008)*

Hard surfaces or magnetic surfaces can be used to propagate quasi-TEM modes inside closed waveguides. The interesting feature of these modes is an almost uniform field distribution inside the waveguide. But the mechanisms governing how these surfaces act, how they can be characterized, and further how the modes propagate are not detailed in the literature. In this paper, we try to answer these questions. We give some basic rules that govern the propagation of the quasi-TEM modes, and show that many of their characteristics (i.e. their dispersion curves) can be deduced from the simple analysis of the reflection properties of the involved surfaces.

**Keywords:** TEM waveguide; quasi-TEM mode; hard surface; perfect magnetic conductor (PMC)

### 1. Introduction

Quasi-TEM modes with an almost uniform electric field repartition are interesting in many domains. For instance, they can be used for resonant cavities applications [1], horn antennas as well as waveguides [2–5]. Similarly to some recent papers [6,7], the main issue of our study is the design of resonant cavity antennas with the goal of improving their aperture efficiency. These antennas require that the outgoing field possesses a good uniformity over the entire emitting surface of the device. Since these antennas can be thought as a waveguide closed at its two ends by a reflecting material and a semi-reflecting one, the first step of the design of these antennas is to understand how a quasi-uniform electric field can propagate inside the waveguide. That is the reason why we focus here on the quasi-TEM modes. Standard Perfect Electric Conducting (PEC) enclosures do not allow the propagation of quasi-TEM modes since they force the tangential electric field to vanish on it and the required boundary condition (non-vanishing tangential electric field) not to be fulfilled. Consequently, these modes require the waveguide walls to be replaced by perfect magnetic conducting surfaces (PMC) or hard surfaces [8–10]. These artificial surfaces can be obtained by a periodical structuring of the interface, and extend the range of attainable boundary conditions (see Table 1). While implementing these solutions, we were led to many interrogations and their

answers were not clearly given in the literature. For instance, a quick analysis of the problem seems to show that the problem is strongly linked with the reflection of a plane wave for grazing incidence. But many of the studies use normal incidence in order to characterize the phase of the reflection coefficient of these surfaces. Another problem is to choose between the numerous surfaces available: PMC or hard? And between the numerous possibilities in order to build these surfaces: PEC substrate loaded with a dielectric slab [1,11], corrugated surfaces [5,11], FSS [4], dielectric slab covered with strips or dipoles [4,7,12].

The study of these structures can be very cumbersome, using 3D numerical codes (modeling cavities) or 2D ones (modeling waveguides). Since our group has been from a long time specialized in the study of diffraction gratings (periodic 1D surfaces), it was interesting to investigate the properties of PMC and hard surfaces using these fast 1D codes [13–15]. We show hereafter that it allows us to characterize their fundamental behavior, and predict some properties of the quasi-TEM modes that may propagate in waveguides built from these surfaces. By these means, we can access the dispersion curves of the modes, their bandwidth, and explain in which manner their uniformity deteriorates when departing from the ideal conditions observed when the propagation constant is that of the vacuum. We can also answer questions

\*Corresponding author. Email: gerard.tayeb@fresnel.fr

Table 1. Properties of PEC, PMC, soft and hard surfaces concerning the reflection coefficient of a plane wave and the associated conditions on the fields in the vicinity of the surface.

Surface	Reflection coefficients	Boundary field components
PEC	$R_{TE} = -1$ $R_{TM} = +1$	$E_t = 0$ $H_t \neq 0$
PMC	$R_{TE} = +1$ $R_{TM} = -1$	$E_t \neq 0$ $H_t = 0$
Soft surface	$R_{TE} = -1$ $R_{TM} = -1$	$E_t = 0$ $H_t = 0$
Hard surface	$R_{TE} = +1$ $R_{TM} = +1$	$E_t \neq 0$ $H_t \neq 0$

about how do these surfaces behave: it is shown that the convenient boundary conditions are obviously not fulfilled on the surface itself, but in a close vicinity to the surface, thanks to the presence of evanescent modes.

We illustrate our results with the study of a square waveguide with four hard walls that allow a dual-polarized quasi-TEM mode.

## 2. Intuitive TEM mode propagation in grazing incidence

The most intuitive conditions that could allow the propagation of TEM modes inside a rectangular waveguide are depicted in Figure 1. We can think of a 'xy-truncated' plane wave propagating along the

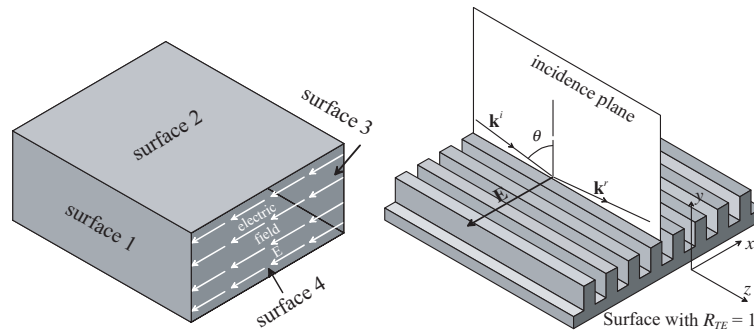


Figure 1. A TEM mode propagating along  $z$  inside a rectangular waveguide (left) and a TE-polarized plane wave reflected at grazing incidence ( $\theta \approx 90^\circ$ ) on a surface used as surfaces 2 and 4 (right).

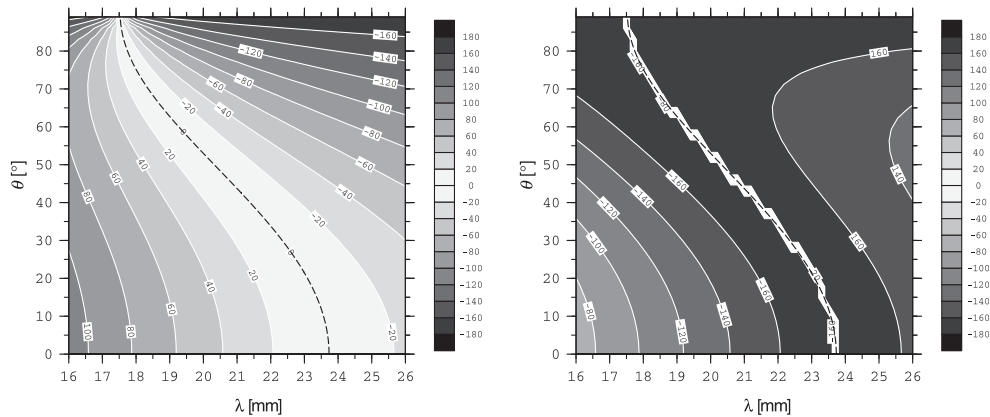


Figure 2. Phases (in degrees) of  $R_{TE}$  (left) and  $R_{TM}$  (right) for a grounded slab with  $h = 4$  mm and  $\varepsilon = 2.2$ . The dashed curve is the curve defined by Equation (1).

$z$ -axis (the waveguide invariance direction), in such a way that the waveguide walls allow the appropriate boundary conditions: the electric field should be normal to surfaces 1 and 3, and tangential to surfaces 2 and 4.

Table 1 provides some properties of the PEC, PMC, soft and hard surfaces in terms of reflection coefficient of a plane wave in TE (respectively, TM) polarization, i.e. when the electric (respectively, magnetic) field is perpendicular to the plane of incidence (see [9] for more details). We suppose that the considered surfaces are lossless. In the case of a periodic surface, we suppose also that there is only one reflected order. It implies that the modulus of the reflection coefficient is equal to 1. In order to get the TEM mode, the electric field should not vanish on surfaces 2 and 4, which should be either PMC or hard for grazing incidence ( $\theta \approx 90^\circ$ ). As regards surfaces 1 and 3, PEC are obviously possible, but also hard surfaces, since they allow a non-vanishing tangential magnetic field. Note that if all four surfaces are hard, the propagation of a TEM mode with orthogonal polarization (E field parallel to the  $y$ -axis) is also possible.

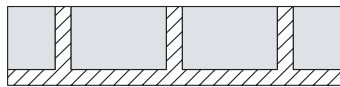


Figure 3. Cross-section of a corrugated surface. The metallic (infinitely conducting) part is dashed. The grayed area is filled with dielectric with  $\varepsilon = 2.2$ . The period is 10 mm, and the width of the ridges is 2.6 mm.

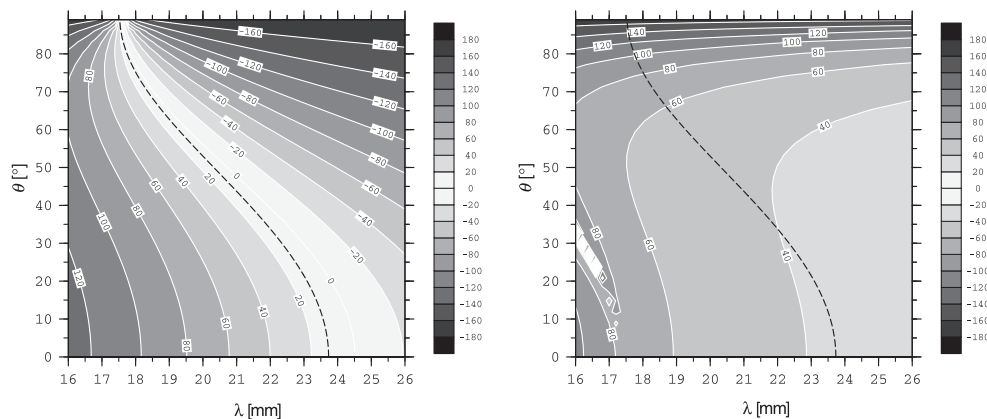


Figure 4. Phases of  $R_{TE}$  (left) and  $R_{TM}$  (right) for the corrugated surface of Figure 3. The dashed curve is the curve defined by Equation (1).

### 3. Study of surfaces using reflection coefficients

Following the previous section, it is interesting to study some realizations that have been proposed for the making of PMC and hard surfaces. We restrict ourselves to 1D periodic surfaces (periodicity along the  $x$ -axis, invariance along the  $z$ -axis, according to Figure 1), since we have developed fast numerical codes able to handle such structures. We investigate the reflection coefficient of a plane wave impinging an infinite surface in the conditions of Figure 1, i.e. the plane of incidence is the  $yz$ -plane, with an incidence  $\theta$ , and for the two fundamental polarization cases (TE and TM). The incident plane wave has unitary amplitude. We plot the phase of the reflection coefficients (the argument of the complex numbers  $R_{TE}$  and  $R_{TM}$ ) versus the wavelength  $\lambda$  and the angle of incidence  $\theta$ . In the ideal situation, where  $R_{TE} = 1$  and for grazing incidences, the incident and the reflected plane waves should add themselves, and give a tangential electric field on the surface with amplitude equal to 2. Since the surfaces have metallic parts, we are conducted to an apparent contradictory situation, since the metallic surface imposes the vanishing of the tangential electric field. But one must remember that the field is not the only superposition of the incident and reflected plane waves. There are also evanescent waves in the vicinity of the surface, and they play a vital role in the realization of the boundary conditions. That will appear clearly hereafter.

Let us start with the simpler surface used to get PMC boundary conditions, i.e. a grounded slab, which is a metallic ground plane covered by

4

R. Pierre et al.

a dielectric layer. Denoting by  $h$  and  $\varepsilon$  the thickness and the relative permittivity of the layer, one shows that  $R_{TE}=+1$  is obtained when the following condition is realized:

$$h = \frac{\lambda}{4\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta}}. \quad (1)$$

Figure 2 shows the phase of  $R_{TE}$  and  $R_{TM}$  for a grounded slab with  $\varepsilon=2.2$  and  $h=4$  mm. Along the dashed curve representing Equation (1), we have simultaneously  $R_{TE}=+1$  and  $R_{TM}=-1$ , as expected for a PMC surface. For our purpose, we mostly focus on the condition  $R_{TE}=+1$ , i.e. the region close to the dashed curve on the Figure 2 (left). We can see that near the interesting point concerning the propagation of the TEM mode described in the previous section (obtained for  $\theta \approx 90^\circ$  and  $\lambda \approx 17.5$  mm), the bandwidth is quite small.

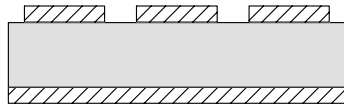


Figure 5. Cross-section of a dielectric slab covered with strips (schematic, not to scale). The metallic (infinitely conducting) part is dashed. The grayed slab has a thickness  $h=0.8$  mm and a permittivity  $\varepsilon=2.2$ . The period is 10 mm, the width of the strips is 7.4 mm, and their thickness is 0.03 mm (not critical).

Let us now consider a periodic corrugated surface whose cross-section (in the  $xy$ -plane) is depicted in Figure 3. It has the same depth  $h=4$  mm as the grounded slab, the same permittivity, but metallic ridges have been added. Figure 4 gives the phases of the reflection coefficients. The dashed curve still represents Equation (1) and facilitates a comparison with the grounded slab. We can see that the  $R_{TE}$  coefficient stays very similar to that of the grounded slab, contrary to the  $R_{TM}$  coefficient. Note that using our numerical codes specially developed for these lamellar gratings [13–15], such graphs are computed in some minutes.

We now consider a dielectric slab covered with strips (Figure 5). The parameters have been chosen in order to get  $R_{TE}=+1$  for the same values  $\theta \approx 90^\circ$  and  $\lambda \approx 17.5$  mm as in the previous cases. Figure 6 gives the phases of the reflection coefficients of this surface. Clearly, this surface behaves like a hard surface ( $R_{TE} \approx +1$  and  $R_{TM} \approx +1$ ) along the curve  $\arg(R_{TE})=0$ . The bandwidth is very narrow near grazing incidences, and becomes larger near normal incidences.

Figure 7 shows field maps of the electric field in the conditions that are suitable for the propagation of the TEM mode. In order to compare the last two structures, the same scale is used in both graphs, and the top of the two surfaces are placed at  $y=0$ . As expected, the field amplitude tends towards a value equal to 2 (in phase addition of the incident and the reflected propagating plane waves) at some distance from the top of the structure. But these graphs also

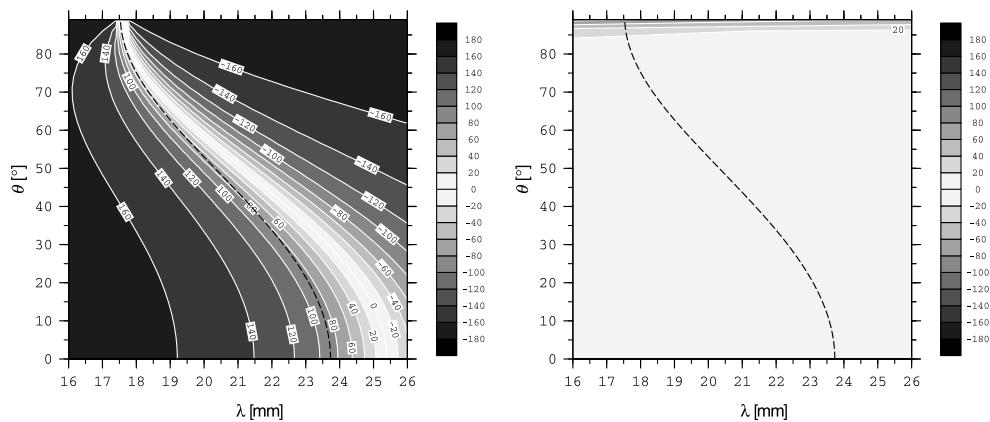


Figure 6. Phases of  $R_{TE}$  (left) and  $R_{TM}$  (right) for the surface of Figure 5. The dashed curve is still the same as in Figures 2 and 4.

show the behavior of the near field and the role of the evanescent waves. They explain the apparent contradictory situation mentioned above: the evanescent waves make the transition between the boundary conditions enforced by the metallic parts and the approximate problem where only the propagative waves are considered. We can see that, even if the dielectric slab covered with strips is a thinner structure than the corrugated one, this advantage is attenuated by the fact that the field is more resonant. If we define an ‘electromagnetic height’ of the structure by the distance between the bottom of the structure and a plane where the electric field is more or less uniform (let us say between 1.8 and 2.2 for instance), this electromagnetic height is roughly equal to 7 mm for the corrugated surface (at  $y \approx 3$  mm) and 5.5 mm for the slab covered with strips (at  $y \approx 4.5$  mm).

#### 4. From the reflection coefficients of the surfaces to the dispersion curves of quasi-TEM guided modes

It has been seen in the previous section how PMC or hard surfaces permit the propagation of a TEM mode in a rectangular waveguide. But this approach also shows that this TEM propagation can only exist for a very particular wavelength. In the present section, we investigate how a quasi-TEM mode can propagate in rectangular waveguides for various wavelengths.

Let us ignore the evanescent waves that vanish rapidly when going away from the surface, and consider only propagating TE waves with an incidence  $\theta$  (Figure 8). We obtain a propagating mode inside the structure when the following phase matching condition is realized, which expresses that the wave is in phase with itself after two reflections on the surfaces:

$$2a \cos \theta + \frac{\lambda}{\pi} \arg(R_{TE}) = m \lambda \quad (2)$$

where  $a$  is the distance between the two surfaces, and  $m$  is an integer. Since the electric field is perpendicular to the Figure 8, the solution will stay valid for a closed waveguide if we use appropriate surfaces for the two others walls (PEC surfaces for instance, but hard surfaces are another possibility).

From the computations done in the previous section, we know the phase of  $R_{TE}$  as a function of  $\lambda$  and  $\theta$ . Let us denote by  $\arg(R_{TE}) = f(\lambda, \theta)$  this relationship. We can now solve the implicit

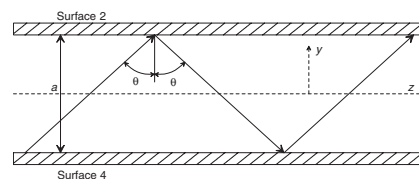


Figure 8. Propagation of a guided mode. The electric field is perpendicular to the figure.

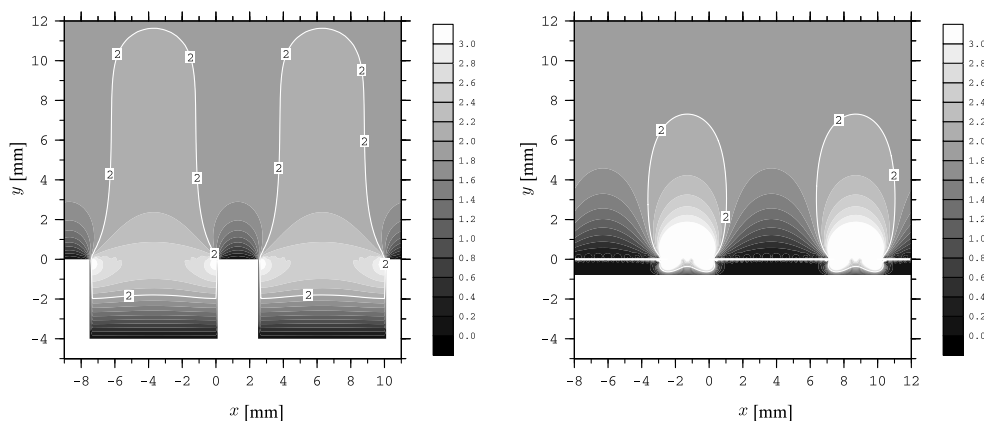


Figure 7. Modulus of the electric field in TE polarization and for grazing incidence  $\theta = 89^\circ$ . Left: corrugated surface at  $\lambda = 17.6$  mm. Right: dielectric slab covered with strips at  $\lambda = 17.58$  mm. The metallic parts are represented in white.

6

R. Pierre et al.

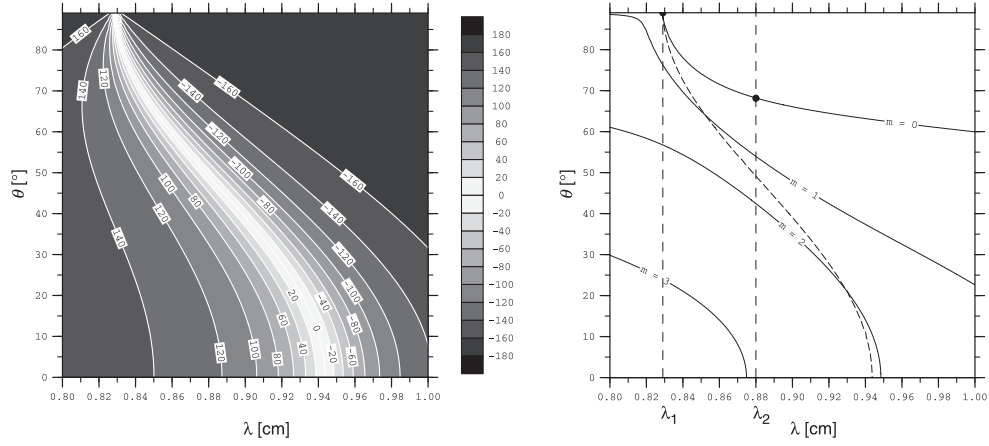


Figure 9. Left: phase of  $R_{TE}$  for a dielectric slab covered with strips (dimensions are given in the text). Right: dispersion curves of the guided modes  $m = 0, 1, 2, 3$ , for a guide with dimension  $a = 1$  cm. The superposed dashed curve is the curve  $\arg(R_{TE}) = 0$ . The wavelengths are in cm.

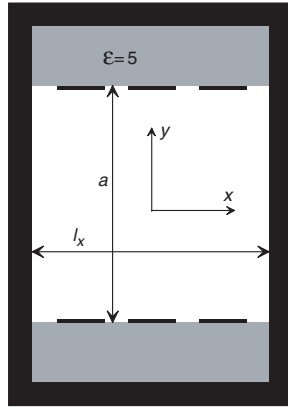


Figure 10. Cross-section of the waveguide. Black represents PEC metallic parts, gray represents dielectric.  $a = l_x = 1$  cm.

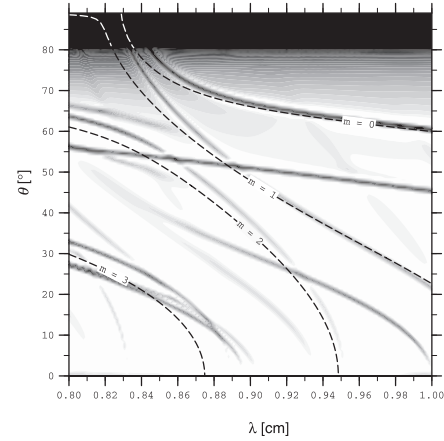


Figure 11. Dispersion curves of the modes of the waveguide shown in Figure 10, computed by the fictitious sources method (gray scale map). The superposed curves are those deduced from Equation (3).

system

$$\begin{cases} \arg(R_{TE}) &= f(\lambda, \theta) \\ 2a \cos \theta + \frac{\lambda}{\pi} \arg(R_{TE}) &= m \lambda \end{cases} \quad (3)$$

in order to get a relationship between  $\lambda$  and  $\theta$  for each value of  $m$ . Figure 9 gives the solution of this implicit system (the dispersion curves of the guided modes) in the case where surfaces 2 and 4 are similar to that of

Figure 5, i.e. a dielectric slab covered with strips. The parameters taken here for these surfaces are: thickness  $h = 0.25$  cm, permittivity  $\varepsilon = 5$ , period equal to  $0.3$  cm, width of the strips equal to  $0.2$  cm, and thickness of the strips equal to  $0.03$  mm. On the dispersion curves, we have pointed out the condition where the TEM mode exists ( $\theta = 90^\circ$  and wavelength  $\lambda_1$ ). For another wavelength such as  $\lambda_2$ , we can verify that the phase

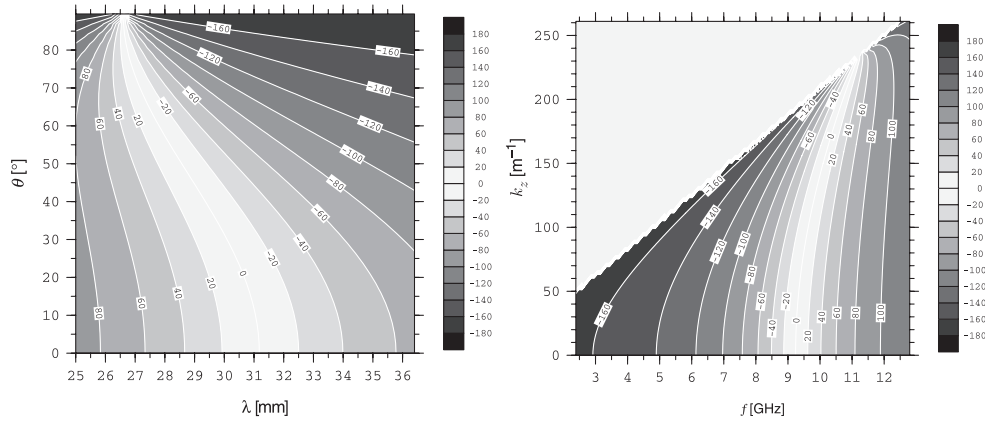


Figure 12. Phase of  $R_{TE}$  for the hard surface used in Section 5, represented in the two coordinate systems  $(\lambda, \theta)$  and  $(f, k_z)$ .

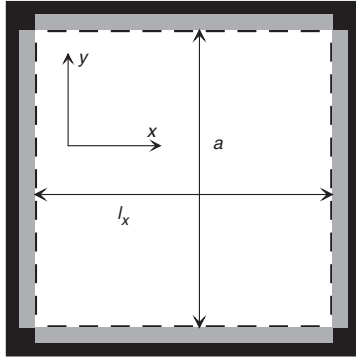


Figure 13. Waveguide cross-section.

matching condition (2) is verified, from the value of  $\arg(R_{TE})$  read on Figure 9 (left).

When departing from the grazing incidence  $\theta \approx 90^\circ$ , the uniformity of the field map deteriorates. From Figure 8, we see that the field in the waveguide is the superposition of two plane waves propagating in directions that make an angle  $(\pi/2) - \theta$  with the  $z$ -axis. It can easily be deduced that in a section of the waveguide, the interference between these plane waves will give a pattern with fringes parallel to the  $x$ -axis and with an interfringe (distance between fringes along the  $y$ -axis) equal to

$$i = \frac{\lambda}{2 \cos \theta}. \quad (4)$$

For example, if we consider the propagation at  $\lambda_2 = 0.88$  cm and  $\theta = 70^\circ$  in Figure 9, the interfringe is

1.29 cm, and since the waveguide dimension is  $a = 1$  cm, we can deduce that the uniformity of the mode in a cross-section of the waveguide will be notably degraded.

In order to check these results, let us consider the waveguide shown in Figure 10. The modes of this waveguide have been studied with the help of a numerical code recently developed in our laboratory and based on the fictitious sources method [16,17]. The mode finding reduces to an eigenvalues problem, and to the search of null eigenvalues. It is not our purpose to detail the method here, and we will just say that the dispersion curves are obtained by the study of the modulus of a determinant, which gives the gray scale map represented in Figure 11. The upper area of this map is the domain of grazing incidences, where this method is not sensitive and gives no information about the guided modes. But for smaller incidences, we can see that it retrieves the expected modes, particularly for  $m = 0, 1$ , and  $2$ . We also see the existence of some other modes that result from the finite size of the waveguide in the  $x$  direction. Those modes have fields that vary along the  $x$ -axis, and are not taken into account in our analysis that is focused on modes with a quasi-uniform field map inside the cross-section (our analysis based on plane waves implies that the field is invariant along the  $x$ -axis).

## 5. Study of the quasi-TEM modes inside a waveguide

Let us now turn to a practical application, using a square waveguide with four hard walls that allow the propagation of a dual-polarized quasi-TEM mode.



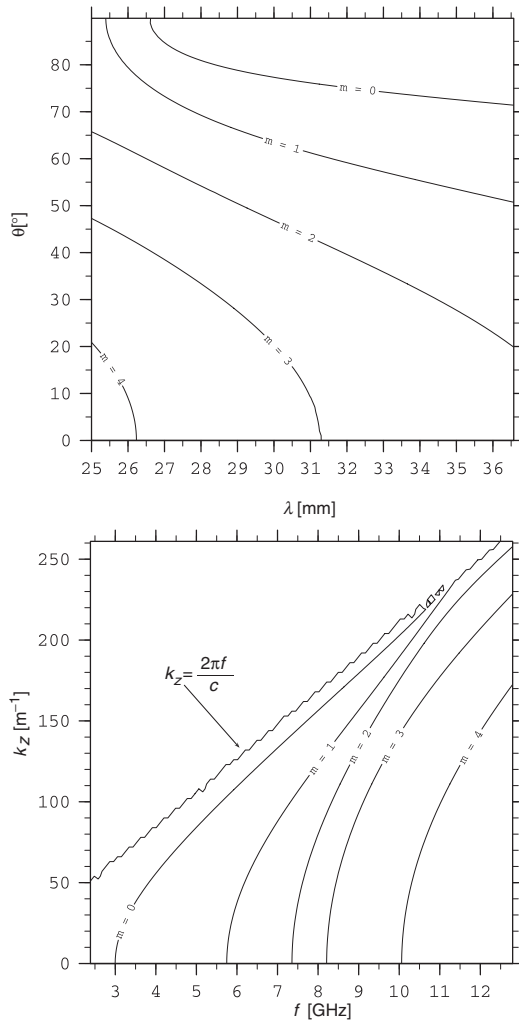


Figure 14. Dispersion curves of the  $x$ -invariant guided modes in the waveguide of Figure 13. The imprecision of the line  $k_z = 2\pi f/c$  is due to the implicit solver used to get these curves.

This situation can be interesting for devices able to work with two orthogonal polarizations, such as resonant cavities antennas for example. These surfaces are similar to that shown in Figure 5, i.e. a dielectric slab covered with strips. Their parameters are now: dielectric thickness  $h = 0.25$  cm, permittivity  $\varepsilon = 5$ , period equal to  $0.5$  cm, width of the strips equal to  $0.3$  cm, and thickness of the strips equal to  $0.03$  mm.

For clarity, it is convenient to draw the dispersion curves of the modes in a more conventional way. We

can transform the coordinate system  $(\lambda, \theta)$  used up to now into the coordinates  $(f, k_z)$  using simple transformations. The frequency  $f$  is simply  $c/\lambda$ . The propagation constant  $k_z$  of the mode along the  $z$  axis is deduced from Figure 8:  $k_z = (2\pi/\lambda)\sin\theta$ . Figure 12 shows  $\arg(R_{TE})$  corresponding to the present surface in these two coordinate systems. Note that on the conventional graph in variables  $(f, k_z)$ , the TEM modes, which correspond to values of  $\theta \approx 90^\circ$ , are located near the line  $k_z = 2\pi/\lambda = 2\pi f/c$ . In this case, the TEM mode corresponds to  $\theta = 90^\circ$ ,  $\lambda = 26.6$  mm,  $f = 11.3$  GHz,  $k_z = 236$  m $^{-1}$ .

The waveguide cross-section is represented in Figure 13. Its dimensions are:  $a = l_x = 47$  mm. From the knowledge of  $R_{TE}$  and the value of  $a$ , we deduce the dispersion curves of the guided modes that are  $x$ -invariant. These dispersion curves are given in Figure 14, in the two coordinate systems.

In order to check the uniformity of the field, we have computed the mode corresponding to  $m=0$  for different frequencies. The computations have been made with the help of a commercial solver (Ansoft HFSS), and only a quarter of the cross-section is represented in the maps of Figure 15.

We can check the interfringe formula given by Equation (4). At 9 GHz,  $\lambda = 33.3$  mm, Figure 14 top gives  $\theta = 75^\circ$ , and finally Equation (4) gives  $i = 64$  mm. At the mode cut-off,  $f = 3$  GHz,  $\lambda = 100$  mm, Figure 14 bottom gives  $\theta \approx 0$ , and  $i = \lambda/2 = 50$  mm. In this case, the field map presents a maximum in the center of the waveguide, and a marked minimum on the upper and lower walls. In any case, the field uniformity along the  $x$ -axis is verified. The evanescent waves due to the strips allow the field to behave nicely in the vicinity of each of the four walls. Finally, it can be observed that the mode keeps a good uniformity in an interesting range of frequencies.

## 6. Conclusion

We have presented a study of quasi-TEM modes inside a rectangular waveguide based on the use of reflection coefficients of the surfaces that make the walls of the waveguide. In this way, all the computations that permit us to get the dispersion curves of the quasi-TEM modes can be made quickly. Of course, a detailed study of the modes inside the waveguide needs more sophisticated and time-consuming codes. This study allowed us to get a clear insight upon these modes and can be useful for the design of such structures. In particular, there exist many surfaces able to guide quasi-TEM modes, and their design is not obvious, due to the multiple geometric and electromagnetic parameters that are



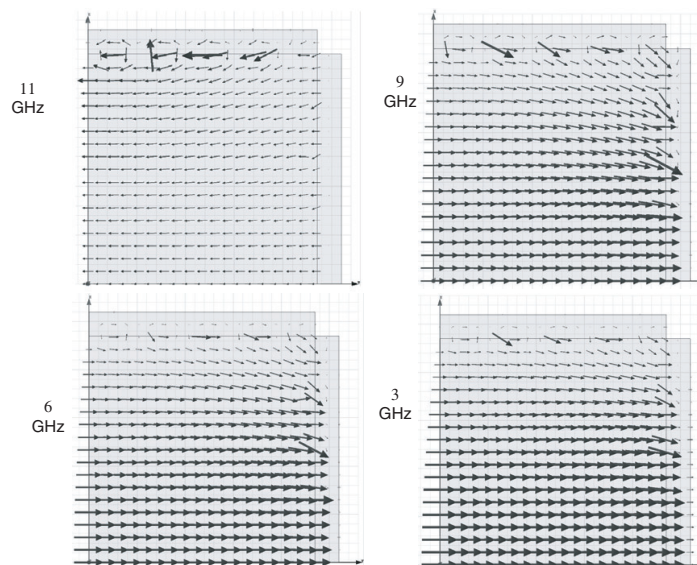


Figure 15. Electric field distribution in a quarter of the cross-section for various frequencies.

involved. With these results in mind, it could be simpler to optimize the structures in order to obtain given specifications for the guided modes: optimization of the bandwidth, choice between corrugated or strip covered surfaces (the latter present stronger local fields and this can be a drawback for some structures when taking losses into account), and so on.

#### Acknowledgment

The support of Thales Alenia Space (Toulouse, France) is gratefully acknowledged.

#### References

- [1] Bernhard, J.T.; Joines, W.T. *IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques* **1996**, *44*, 457–460.
- [2] Yang, F.R.; Ma, K.P.; Qian, Y.X.; Itoh, T. *IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques* **1999**, *47*, 2092–2098.
- [3] Kehn, M.N.M.; Kildal, P.S. *IEEE Trans. Antennas and Propagation* **2005**, *53*, 100–109.
- [4] Kehn, M.N.M.; Nannetti, M.; Cucini, A.; Maci, S.; Kildal, P.S. *IEEE Trans. Antennas and Propagation* **2006**, *54*, 2275–2282.
- [5] Epp, L.W.; Hoppe, D.J.; Kelley, D.T. *IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques* **2006**, *54*, 1048–1054.
- [6] Bichelot, F.; Loison, R.; Gillard, R. *Electron. Lett.* **2005**, *41*, 1264–1266.
- [7] Roncière, O.; Sauleau, R.; Mahdjoubi, K.; Legay, H. *Sixth Conference on Telecommunications*, Peniche, Portugal, 9–11 May 2007, 2007; pp 77–80.
- [8] Kildal, P.S. *Electron. Lett.* **1988**, *24*, 168–170.
- [9] Kildal, P.S. *IEEE Trans. Antennas and Propagation* **1990**, *38*, 1537–1544.
- [10] Kildal, P.S.; Kishk, A.A.; Maci, S. *IEEE Trans. Antennas and Propagation* **2005**, *53*, 2–7.
- [11] Aminian, A.; Yang, F.; Rahmat-Samii, Y. *IEEE Trans. Antennas and Propagation* **2005**, *53*, 18–28.
- [12] Cucini, A.; Caiazzo, A.; Bennati, P.; Maci, S., *IEEE Antennas and Propagation Society Symposium*, Vols. 1–4 Digest, 2004; pp 807–810.
- [13] Sandstrom, S.E.; Tayeb, G.; Petit, R. *J. Electromagnetic Waves and Applications* **1993**, *7*, 631–649.
- [14] Gralak, B.; de Dood, M.; Tayeb, G.; Enoch, S.; Maystre, D. *Phys. Rev. E* **2003**, *67*, 66601.
- [15] Gralak, B.; Pierre, R.; Tayeb, G.; Enoch, S. *J. Opt. Soc. Am. A* **2008**, *25*, 3099–3110.
- [16] Tayeb, G. *Appl. Computational Electromagnetics Society J.* **1994**, *9*, 90–100.
- [17] Tayeb, G.; Enoch, S. *J. Opt. Soc. Am. A Optics Image Science and Vision* **2004**, *21*, 1417–1423.

# Bibliographie

## Électromagnétisme fondamental

- [E1] Boris Gralak, Gérard Tayeb et Stefan Enoch, *Morpho butterflies wings color modeled with lamellar grating theory*, Optics Express **9** (2001), n° 11, 567–578.  
<http://www.opticsinfobase.org/abstract.cfm?URI=oe-9-11-567>.
- [E2] Pete Vukusic et J. Roy Sambles, *Photonic structures in biology*, Nature **424** (2003), n° 6950, 852–855.  
<http://www.nature.com/nature/journal/v424/n6950/abs/nature01941.html>.
- [E3] Boris Gralak, Stefan Enoch et Gérard Tayeb, *Anomalous refractive properties of photonic crystals*, Journal of the Optical Society of America A **17** (2000), n° 6, 1012–1020.  
<http://www.opticsinfobase.org/abstract.cfm?URI=josaa-17-6-1012>.
- [E4] Viktor G. Veselago, *The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of  $\epsilon$  and  $\mu$* , Soviet Physics Uspekhi **10** (1968), n° 4, 509–514.  
<http://ufn.ru/en/articles/1968/4/a/>.
- [E5] Hideo Kosaka, Takayuki Kawashima, Akihisa Tomita, Masaya Notomi, Toshiaki Tamamura, Takashi Sato et Shojiro Kawakami, *Superprism phenomena in photonic crystals*, Physical Review B **58** (1998), n° 16, R10096–R10099.  
<http://link.aps.org/abstract/PRB/v58/pR10096>.
- [E6] John Brian Pendry, *Negative Refraction Makes a Perfect Lens*, Physical Review Letters **85** (2000), n° 18, 3966–3969.  
<http://link.aps.org/abstract/PRL/v85/p3966>.
- [E7] Raphaël Pierre et Boris Gralak, *Appropriate truncation for photonic crystals*, Journal of Modern Optics **55** (2008), n° 11, 1759–1770.  
<http://dx.doi.org/10.1080/09500340701799070>.
- [E8] Wojciech Śmigaj et Boris Gralak, *Validity of the effective-medium approximation of photonic crystals*, Physical Review B **77** (2008), n° 23, 235445.  
<http://link.aps.org/abstract/PRB/v77/e235445>.
- [E9] Boris Gralak, *Étude théorique et numérique des propriétés des structures à bandes interdites photoniques*, Thèse de doctorat, Université d’Aix-Marseille III, juin 2001.
- [E10] Raphaël Pierre, Boris Gralak, Thibault Decoopman, Gérard Tayeb, Stefan Enoch et Daniel Maystre, *Effect of the interface separating a homogeneous medium and a*

- photonic crystal*, PIERS 2006-Tokyo, Japon, Proceedings, vol. 1, Progress In Electromagnetics Research Symposium, août 2006, p. 55–59.  
<http://www.emacademy.org/piers2k6Japan/>.
- [E11] Thibault Decoopman, Gérard Tayeb, Stefan Enoch, Daniel maystre et Boris Gralak, *Photonic Crystal Lens : From Negative Refraction and Negative Index to Negative Permittivity and Permeability*, Physical Review Letters **97** (2006), 073905.  
<http://link.aps.org/abstract/PRL/v97/e073905>.
- [E12] Augustin Fresnel, *Mémoire sur la diffraction de la lumière*, années 1821 et 1822, vol. 5, ch. 7, p. 339–476, Académie Royale des Sciences de l'Institut de France, 1826.  
<http://books.google.fr/books?id=5N8EAAAAQAAJ>.
- [E13] Roger Petit, *Ondes électromagnétiques en radioélectricité et en optique*, Masson, 1993.
- [E14] Jin Au Kong, *Electromagnetic Wave Theory*, EMW Publishing, 2000.
- [E15] Frédéric Zolla, *Contribution à l'étude de la diffraction et de l'absorption des ondes électromagnétiques*, Thèse de doctorat, Université d'Aix-Marseille III, octobre 1993.
- [E16] Philippe Boyer, *Élaboration d'une méthode différentielle pour l'étude des fibres optiques microstructurées*, Thèse de doctorat, Université Paul Cézanne - Aix-Marseille III, octobre 2006.
- [E17] Philippe Boyer, Evgeny Popov, Michel Nevrière et Gilles Renversez, *Diffraction theory : application of the fast Fourier factorization to cylindrical devices with arbitrary cross section lighted in conical mounting*, Journal of the Optical Society of America A **23** (2006), n° 5, 1146–1158.  
<http://www.opticsinfobase.org/abstract.cfm?URI=josaa-23-5-1146>.
- [E18] Boris Gralak et Sébastien Guenneau, *Transfer matrix method for point sources radiating in classes of negative refractive index materials with 2n-fold antisymmetry*, Waves in Random and Complex Media **17** (2007), n° 4, 581–614.  
<http://dx.doi.org/10.1080/17455030701604713>.

## Surfaces composites et antennes

- [A1] Daniel Frederic Sievenpiper, *High-Impedance Electromagnetic Surfaces*, Thèse de doctorat, University of California, 1999.
- [A2] Dan Sievenpiper, Lijun Zhang, Romulo F. Jimenez Broas, Nicholas G. Alexópoulos et Eli Yablonovitch, *High-Impedance Electromagnetic Surfaces with a Forbidden Frequency Band*, IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques **47** (1999), n° 11, 2059–2074.
- [A3] Giacomo Benelli, *Development of the fictitious sources method for stratified media and design of resonant cavities antennas*, Thèse de doctorat, Université Paul Cézanne - Aix-Marseille III, janvier 2007.
- [A4] Nicolas Guérin, *Étude théorique et numérique de la diffraction par des réseaux bi-périodiques en électromagnétisme. Application aux cristaux photoniques et aux antennes directives compactes*, Thèse de doctorat, Université de Droit, d'Économie et des Sciences Aix-Marseille III, septembre 2003.

- [A5] François Bichelot, *Techniques d'amélioration de la bande passante en directivité et de l'efficacité de surface des antennes à Bande Interdite Electromagnétique (BIE)*, Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Rennes, décembre 2007.
- [A6] Nicolas Guérin, Stefan Enoch, Gérard Tayeb, Pierre Sabouroux, Patrick Vincent et Hervé Legay, *A Metallic Fabry-Perot Directive Antenna*, IEEE Transactions on Antennas and Propagation **54** (2006), n° 1, 220–224.
- [A7] Constantine A. Balanis, *Antenna Theory : Analysis and Design*, seconde édition, John Wiley & Sons, 1997.
- [A8] Giuseppe Ruvio, *Field solutions in soft and hard waveguides*, Master's thesis, Department of Electromagnetics, Chalmers University of Technology, septembre 2002.
- [A9] Per-Simon Kildal, *Definition of Artificially Soft and Hard Surfaces for Electromagnetic Waves*, Electronics Letters **24** (1988), n° 3, 168–170.
- [A10] ———, *Artificially Soft and Hard Surfaces in Electromagnetics*, IEEE Transactions on Antennas and Propagation **38** (1990), n° 10, 1537–1544.
- [A11] Amir Aminian, Fan Yang et Yahya Rahmat-Samii, *Bandwidth Determination for Soft and Hard Ground Planes by Spectral FDTD : A Unified Approach in Visible and Surface Wave Regions*, IEEE Transactions on Antennas and Propagation **53** (2005), n° 1, 18–28.
- [A12] Jon Anders Aas, *Plane-Wave Reflection Properties of Two Artificially Hard Surfaces*, IEEE Transactions on Antennas and Propagation **39** (1991), n° 5, 651–656.
- [A13] Omid Sotoudeh, Per-Simon Kildal, Per Ingvarson et Sergei P. Skobelev, *Single- and Dual-Band Multimode Hard Horn Antennas With Partly Corrugated Walls*, IEEE Transactions on Antennas and Propagation **54** (2006), n° 2, 330–339.
- [A14] Zieniutycz Włodzimierz et Per-Simon Kildal, *Study of wall region and dielectric losses in a square hard horn*, IEE Proceedings-H **139** (1992), n° 2, 139–142.
- [A15] Per-Simon Kildal et Erik Lier, *Hard horns improve cluster feeds of satellite antennas*, Electronics Letters **24** (1988), n° 8, 491–492.
- [A16] Per-Simon Kildal et Sergei P. Skobelev, *Blindness Removal in Arrays of Rectangular Waveguides Using Dielectrically Loaded Hard Walls*, IEEE Transactions on Antennas and Propagation **46** (1998), n° 4, 546–550.

## Analyse numérique, librairies

- [N1] Gene H. Golub et Charles F. Van Loan, *Matrix Computations*, troisième édition, Johns Hopkins University Press, octobre 1996.
- [N2] Christian Hafner, *Multiple multipole program computation of periodic structures*, Journal of the Optical Society of America A **12** (1995), n° 5, 1057–1067.  
<http://josaa.osa.org/abstract.cfm?uri=josaa-12-5-1057>.
- [N3] Sandia Los Alamos Air Force Weapons Laboratory Technical Exchange Committee (SLATEC).  
<http://www.netlib.org/slatec/>.

- [N4] Intel Corporation, *Intel<sup>®</sup> Math Kernel Library Reference Manual*, août 2005.  
<http://developer.intel.com>.
- [N5] Esteban Moreno, Daniel Erni, Christian Hafner et Rüdiger Vahldieck, *Multiple multipole method with automatic multipole setting applied to the simulation of surface plasmons in metallic nanostructures*, Journal of the Optical Society of America A **19** (2002), n° 1, 101–111.  
<http://josaa.osa.org/abstract.cfm?uri=josaa-19-1-101>.
- [N6] Christian Hafner, *The Generalized Multipole Technique for Computational Electromagnetics*, Artech, 1990.
- [N7] Adrian Doicu, Yuri Eremin et Thomas Wriedt, *Acoustic & Electromagnetic Scattering Analysis Using Discrete Sources*, Academic Press, 2000.
- [N8] Alexandr Gavrilovich Kyurkchan, A. I. Sukov et A. I. Kleev, *Singularities of Wave Fields and Numerical Methods of Solving the Boundary-Value Problems for Helmholtz Equation*, Computational Methods in Mechanics, vol. 4, ch. 5, p. 81–109, Elsevier, 1999.
- [N9] Guy Robin, *Un algorithme d'inversion pour les matrices de Toeplitz par blocs*, Mémoires de la Société Mathématique de France **49/50** (1977), 177–180.  
[http://www.numdam.org/item?id=MSMF\\_1977\\_\\_49-50\\_\\_177\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1977__49-50__177_0).
- [N10] Piotr J. Flatau, Graeme L. Stephens et Bruce T. Draine, *Light scattering by rectangular solids in the discrete-dipole approximation : a new algorithm exploiting the Block-Toeplitz structure*, Journal of the Optical Society of America A **7** (1990), n° 4, 593–600.  
<http://josaa.osa.org/abstract.cfm?uri=josaa-7-4-593>.
- [N11] Milton Abramowitz et Irene A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, dixième édition, ch. Bessel Functions of Integer Order, p. 363–364, Dover, novembre 1970.  
<http://www.math.sfu.ca/~cbm/aands/>.
- [N12] Gérard Tayeb, *Contribution à l'étude de la diffraction des ondes électromagnétiques par des réseaux. Réflexions sur les méthodes existantes et sur leur extension aux milieux anisotropes.*, Thèse de doctorat, Université de Droit, d'Économie et des Sciences Aix-Marseille III, 1990.
- [N13] ———, *The method of fictitious sources applied to diffraction gratings*, Applied Computational Electromagnetics Society **9** (1994), n° 3, 90–100.
- [N14] Nicolas Guérin, Stefan Enoch et Gérard Tayeb, *Combined Method for the Computation of the Doubly Periodic Green's Function*, Journal of Electromagnetic Waves and Applications **15** (2001), 205–221.
- [N15] Lifeng Li, *A modal analysis of lamellar diffraction gratings in conical mountings*, Journal of Modern Optics **40** (1993), n° 4, 553–573.
- [N16] Boris Gralak, Raphaël Pierre, Gérard Tayeb et Stefan Enoch, *Solutions of Maxwell's equation in presence of lamellar gratings including infinitely conducting metal*, to be published in Journal of the Optical Society of America A, juin 2008.

- [N17] Johan Gielis, *A generic geometric transformation that unifies a wide range of natural and abstract shapes*, American Journal of Botany **90** (2003), n° 3, 333–338.  
<http://www.amjbot.org/cgi/content/abstract/90/3/333>.
- [N18] Alain Robert, *Fourier Series of Polygons*, The American Mathematical Monthly **101** (1994), n° 5, 420–428.  
<http://www.jstor.org/pss/2974902>.
- [N19] Sylvia Murphy, Mary Haley et Dennis Shea, *NCAR Command Language (NCL) Mini Graphics Manual*, National Center for Atmospheric Research, 1850 Table Mesa Drive, Boulder CO 80305, décembre 2007, version 1.2, NCL version 5.0.0.  
<http://www.ncl.ucar.edu/Document/Manuals/>.
- [N20] Dennis Shea, Mary Haley et Sylvia Murphy, *NCAR Command Language (NCL) Mini-Language Reference Manual*, National Center for Atmospheric Research, 1850 Table Mesa Drive, Boulder CO 80305, décembre 2007, version 1.1.5, NCL version 5.0.0.  
<http://www.ncl.ucar.edu/Document/Manuals/>.
- [N21] *Netlib Repository*.  
<http://www.netlib.org/>.
- [N22] *Guide to Available Mathematical Software (GAMS)*.  
<http://gams.nist.gov/>.

## Langue française

- [F1] Émile Littré, *Dictionnaire de la langue française*, 1877.  
<http://francois.gannaz.free.fr/Littre/>.
- [F2] Jacques Drillon, *Traité de la ponctuation française*, seconde édition, Gallimard, 1991.







## **Propriétés effectives d'un cristal photonique. Extensions de la méthode des sources fictives. Application à l'étude du guidage de modes quasi-TEM uniformes.**

### **Résumé**

LE premier volet de ce document est dédié à l'obtention des grandeurs effectives d'un cristal photonique monodimensionnel. La méthode employée consiste à calquer les propriétés en dispersion et en réflexion d'un cristal sur celles d'un milieu homogène anisotrope. Cette nouvelle approche permet d'atteindre les permittivité et perméabilité effectives du cristal sous la forme d'un couple de tenseurs. Leur expression indique un critère nécessaire pour réaliser l'adaptation d'impédance entre un cristal et le milieu ambiant. Celui-ci est alors étendu puis appliqué aux cristaux bidimensionnels.

Le second volet est l'étude du guidage de modes quasi-TEM uniformes dans un guide métallique au moyen de parois structurées. Les structures sont des surfaces *hard* analysées grâce à la méthode modale tandis que les guides d'ondes associés le sont par une extension de la méthode des sources fictives. Cartes de champs et relations de dispersion révèlent le comportement des surfaces et guides envisagés.

**Mots clés** cristaux photoniques, multicouches, réseaux de diffraction, parois magnétiques, surfaces *hard*, mode TEM, guides d'ondes, méthode des sources fictives.

## **Effective properties of photonic crystals. Extensions to the fictitious sources method with application to the study of uniform quasi-TEM guiding.**

### **Abstract**

THE first part of this document is dedicated to the obtention of the effective properties of monodimensional photonic crystals. The procedure consists in identifying the dispersive and reflective properties of some crystal with the ones from a medium both homogeneous and anisotropic. This novel approach permits one to express the effective permittivity and permeability of a crystal by two tensors. Their expression gives a necessary criterion to observe impedance matching between one crystal and the environment. Such a criterion is adapted and then applied to bidimensional crystals.

The second part of the study is about the guiding of uniform quasi-TEM modes in a metallic waveguide via structured walls. The structures are the so-called hard surfaces. While the modal method is used to handle such surfaces, we use the fictitious sources method to model the associated waveguides. Map fields and dispersion curves reveal the behavior of the involved structures.

**Keywords** photonic crystals, thin films, diffraction gratings, magnetic surfaces, hard surfaces, TEM mode, waveguides, fictitious sources method.